

KESKI-SUOMEN LUKIOLAISTEN MATEMATIIKKAKILPAILU 23.1.2025

KIRJOITA JOKAISEN TEHTÄVÄN RATKAISU OMALLE VASTAUSPAPERILLEEN.

KIRJOITA NIMESI SELVÄSTI JOKAISEEN VASTAUSPAPERIIN.

PALAUTA NIMELLÄSI JA TEHTÄVÄNUMEROLLA VARUSTETTU VASTAUSPAPERI NIISTÄKIN TEHTÄVISTÄ, JOIHIN ET VASTAA.

MUISTA PERUSTELLA VASTAUKSESI, JOS TEHTÄVÄNANNOSSA EI MUUTA KÄSKETÄ.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin perustelematta vastaustasi.

- (a) Äiti synnyttää lapsen 26 vuotiaana. Kuinka vanha lapsi on, kun äiti on kolme kertaa niin vanha kuin lapsi? [1p]
- (b) Jyväskylän potkupalloliigassa on 17 joukkuetta. Liigassa pelataan yksinkertainen sarja, eli kaikki joukkueet pelaavat keskenään täsmälleen yhden kerran. Montako ottelua sarjassa pelataan yhteensä? [1p]
- (c) Huonekalukauppa myy marraskuun alussa sohvaa 100 euron hintaan ja haluaa tarjota sitä myös joulun alemmyyneissä samaan hintaan. Sohva saadaan kuitenkin paremmin myydyksi, jos kauppa ensin nostaa tuotteen hintaa x prosenttia marraskuussa, ja tarjoaa sen sitten joulukuussa 25 prosentin alennuksessa. Määritä hinnan nostoprosentti x siten että alkupe-
räistä 100 euron hintaa voidaan jouluna mainostaa 25%:n alennuksena. [1p]
- (d) Virvoitusjuomatehdas valmistaa Sihi-juomapulloja, joiden tilavuus $0,5\text{ l}$ ja korkeus 10 cm . Asiakkaiden toiveesta virvoitusjuomatehdas päättää alkaa valmistaa samanmuotoisia pulloja, joiden tilavuus on 4 l . Kuinka korkeita uudet pullot ovat? [1p]
- (e) Määritellään $P^{(1)}(x) = P(x)$, $P^{(2)}(x) = P(P(x))$, $P^{(3)}(x) = P(P(P(x)))$ ja niin edelleen. Laske $P^{(2025)}(0)$ kun $P(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$. [2p]

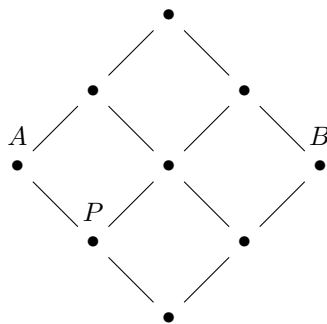
2.

- (a) Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, m siten, että $m^n = 2025$. [3p]
- (b) Laske summa [3p]

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 89.$$

3.

- (a) Turisti on eksynyt Manhattanin ruutukaavaan. Kuvassa pisteet ovat risteyksiä, ja viivat teitä, jotka yhdistävät vierekkäisiä risteyksiä. Kaikki risteykset ja tiet on merkitty kuvaan. Turisti aloittaa risteyksestä P , ja tietämättä sen paremmin, päättää valita aina kaikista mahdollisista suunnista täysin mielivaltaisesti; kaikki tiet ovat yhtä todennäköisiä. Hän sitten kävelee valittua tietä seuraavaan risteykseen, unohtaen mitä juuri teki, ja valitsee aina uuden suunnan siten että kaikki suunnat ovat jälleen yhtä todennäköisiä tulla valituksi (mukaan lukien se, mistä hän juuri tuli). Millä todennäköisyydellä turisti päättyy ensin risteykseen A ennen risteystä B ? [3p]

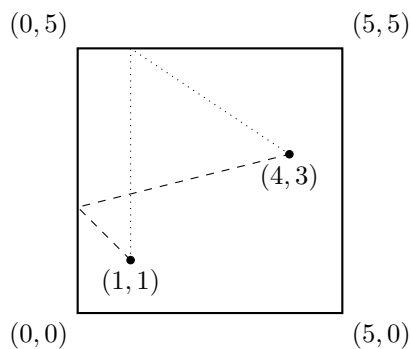


- (b) Harvinaiselle uudelle sairaudelle DIVOC on juuri kehitetty testi. Tämä sairaus on vain 1%:lla väestöä. Testi on kuitenkin väärässä 1% ajasta, siten että 1% sairaista saa negatiivisen testituloksen ja 1% terveistä saa positiivisen testituloksen. Sinun testisi on positiivinen. Millä todennäköisyydellä olet sairas?

[3p]

4. Aloitat pisteestä $(1, 1)$, joka on kuvan mukaisen neliön sisällä. Etsi lyhin pituus polulle, joka kulkee pisteestä $(1, 1)$ pisteeseen $(4, 3)$ käymällä ensin neliön reunalla. Kuvassa on katkoviivoilla piirretty kaksi esimerkkiä sellaisista poluista.

[6p]



5. Osoita, että $n^{n+1} \geq (n+1)^n$ kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 3$.

[6p]