

XXX KESKI-SUOMEN LUKIOLAISTEN MATEMATIIKKAKILPAILU 26.1.2023

LASKINTA SAA KÄYTTÄÄ.

KIRJOITA JOKAISEN TEHTÄVÄN RATKAISU OMALLE VASTAUSPAPERILLEEN.

KIRJOITA NIMESI SELVÄSTI JOKAISEEN VASTAUSPAPERIIN.

PALAUTA NIMELLÄSI JA TEHTÄVÄNUMEROLLA VARUSTETTU VASTAUSPAPERI NIISTÄKIN TEHTÄVISTÄ, JOIHIN ET VASTAA.

MUISTA PERUSTELLA VASTAUKSESI, JOS TEHTÄVÄNANNOSSA EI MUUTA KÄSKETÄ.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin perustelematta vastaustasi.

(a) Suuressa astiassa on 10 litraa viisiprosenttista suolaliuosta. Paljonko astiaan tulee lisätä vettä, jotta liuksesta saadaan kaksiprosenttista suolaliuosta? [1p]

(b) Ratkaise $\theta \in \mathbb{R}$, kun

$$\begin{cases} \theta = 1 + \frac{1}{\theta} \\ \theta > 0. \end{cases}$$

[1p]

(c) Pontuksella on kuusi näkkileipää, seitsemän hapankorppua ja seitsemän voileipäkeksiä. Hän syö joka päivän yhden näistä kahdestakymmenestä leivästä. Kuinka monta voileipäkeksiä Pontuksella voi enimmillään olla viidentoista päivän kuluttua? [1p]

(d) Tiina on kolme vuotta Lauria vanhempi. Askon ikä saadaan, kun lasketaan Tiinan ja Laurin iät yhteen. Kun Lauri on seitsemän kertaa niin vanha kuin mitä hän on nyt, niin silloin Asko on kolme kertaa niin vanha kuin mitä hän on nyt. Kuinka vanha Tiina on nyt? [1p]

(e) Omar on koonnut $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ laatoista tason suorakulmion, jonka pinta-ala on 100 cm^2 . Kuinka monta senttimetriä on tällöin suorakulmion suurin mahdollinen piirin pituus? [1p]

(f) Olkoon $P(x) = x^2 + 2$. Mikä on polynomin $P(P(P(P(x))))$ aste? [1p]

2. Kaksi laivaa A ja B kiertävät majakkaa O esteettömällä ulapalla vastapäivään samalla vakionopeudella. Laivat pysyttelevät majakasta koko ajan vakioetäisyyden päässä siten, että laivan A etäisyys majakkaan on 2 kilometriä ja laivan B etäisyys 4 kilometriä. Laivojen lähtöhetkellä laiva A sijaitsee majakasta katsottuna suoraan idässä ja laiva B etelässä. Kuinka pitkän matkan kumpikin laiva on kulkenut laivojen lähtöhetkestä mitattuna, kun ne tulevat ensimmäistä kertaa sijaitsemaan samalla majakasta O piirretyllä puolisuoralla? [6p]

3. Luvun 398178 viimeinen numero on 8 ja ensimmäinen numero on 3.

(a) Mitkä kaikki numerot voivat olla luvun 9^n viimeisiä numeroita, kun $n \in \mathbb{N}$? [3p]

(b) Tarkastellaan lukuja

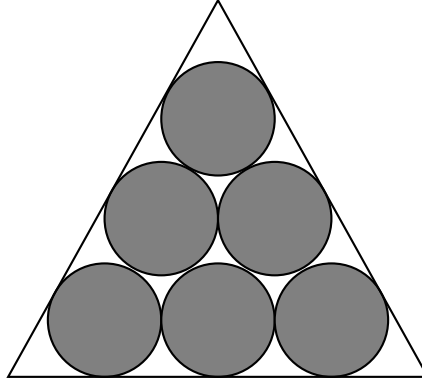
$$9, 9^9, 9^{9^9}, 9^{9^{9^9}}, \dots$$

Mitkä ovat näiden lukujen viimeiset numerot?

[3p]

JATKUU TOISELLA PUOLELLA!

4. Olkoon $r > 0$. Kuusi r -säteistä ympyrää on asetettu alla olevan kuvan mukaiseen muodostelmaan. Jokainen ympyrä sivuaa sen vieressä olevia ympyröitä kuvassa esitetyllä tavalla. Kuvan tasasivuisen kolmion sivut sivuavat kuutta ympyrää yhteensä yhdeksässä eri pisteessä kuvanmukaisesti. Laske varjostetun alueen pinta-alan osuus kuvan tasasivuisen kolmion pinta-alasta.



[6p]

5. Tasossa on kolme pistettä, jotka eivät ole kaikki samalla suoralla. Kuinka monta sellaista suoraa on, jotka ovat yhtä kaukana jokaisesta pisteestä?

[6p]