

## Keski-Suomen lukiolaisten matematiikkakilpailu 23.1.2020

LASKINTA SAA KÄYTTÄÄ.

KIRJOITA JOKAISEN TEHTÄVÄN RATKAISU OMALLE VASTAUSPAPERILLEEN.

KIRJOITA NIMESI SELVÄSTI JOKAISEEN VASTAUSPAPERIIN.

LUE ENSIN KAIKKI TEHTÄVÄT LÄPI JA KYSY JOS ON EPÄSELVYYKSIÄ.

MUISTA PERUSTELLA VASTAUKSESI (PAITSI YKKÖSTEHTÄVÄSSÄ)!

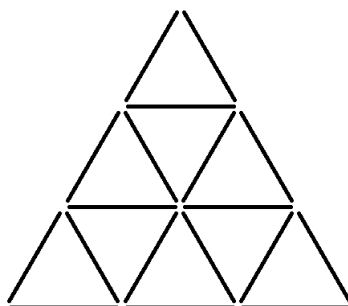
1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin perustelematta.

(a) Ratkaise yhtälö

$$\frac{\frac{3}{x} - 1}{\frac{2x-3}{x}} = 1$$

[1p]

(b) Antti muodostaa tulitikuista ”pyramidin” jonka sivun pituus on 3 tulitikkua, kuten kuvassa:



Montako tulitikkua hänen tulee lisätä kuvaan, että hän voi muodostaa pyramidin jonka sivun pituus on 5 tulitikkua?

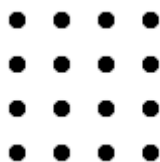
(c) Normaalin pitsan halkaisija on 20cm ja se maksaa 9 euroa. Perhepitsan halkaisija on 6cm isompi, mutta se maksaa 13 euroa. Kummassa vaihtoehdossa on enemmän pitsaa suhteessa hintaan? [1p]

(d) Eräessä valtiossa valuutan nimi on ’hippu’. Valtiossa on käytössä yhden hipun, seitsemän hipun, ja 24 hipun kolikot. Kuinka monta kolikkoa pitää yhteensä ottaa mukaan kauppaan, jotta minkä tahansa alle sadan hipun ostoksen voi maksaa tasarahalla? [1p]

(e)  $5 \times 5$ -ruudukko täytetään luvuilla  $1, 2, \dots, 25$  niin, että jokainen luku esiintyy tasan kerran ja jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen lukujen summa on sama luku  $N$ . Mikä on tämä luku  $N$ ? [1p]

(f) Montako nollaa on luvun  $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots 19^{19} \cdot 20^{20}$  lopussa? [1p]

(g) Alla olevasta  $4 \times 4$  pisteruudukosta valitaan satunnaisesti kolme pistettä.



Millä todennäköisyydellä kaikki kolme pistettä ovat samalla suoralla? Voit ilmaista vastauksesi murtolukuna tai desimaalina. [1p]

(h) Avaruusolioiden kolmessa kädessä on yhteensä 15 sormea, mutta eri käsien sormien määrä voi vaihdella. Kuinka monta erilaista yhdistelmää on, kun jokaisessa kädessä on ainakin kaksi sormea? Esim. yhdistelmät  $3-7-5$  ja  $5-3-7$  lasketaan eri yhdistelmiksi. [1p]

**2.** Aavikossa on kolme keidasta, keitaat  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Eräänä vuonna keitaassa  $A$  on pysähtynyt 1000 henkilöä, keitaassa  $B$  200 henkilöä ja keitaassa  $C$  300 henkilöä.

Joka vuosi keitaissa olevat henkilöt siirtyvät seuraavaan keitaaseen, järjestyksessä  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ . Kuitenkin jos keitaaseen on tulossa vähemmän henkilöitä kuin sieltä on menossa, jää keitaaseen 10 henkilöä poistuvien joukosta ottamaan uudet tulokkaat vastaan.

Kuinka monen vuoden kuluttua keitaissa on sama väkiluku? [4p]

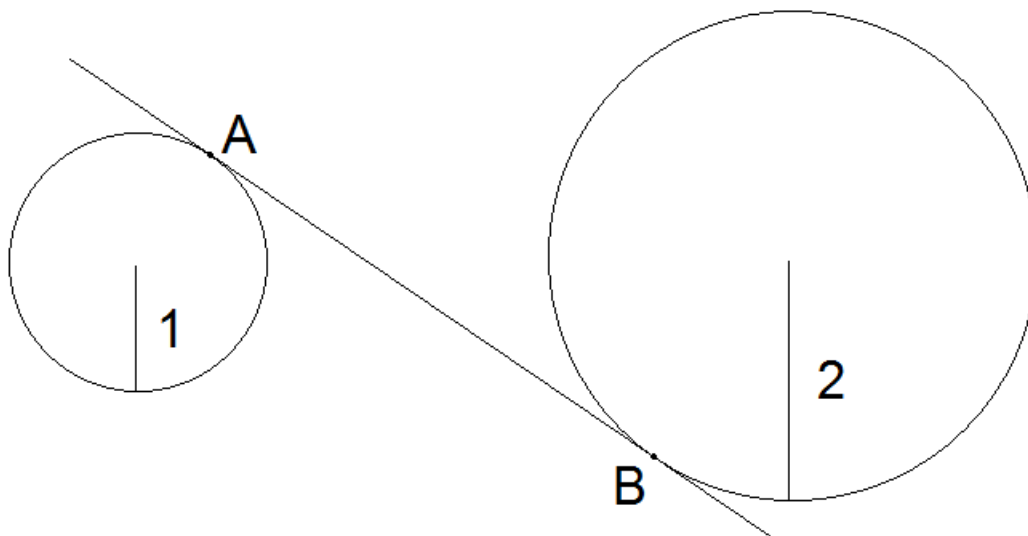
**3.** Mikä on suurin määrä torneja jota  $8 \times 8$  shakkilaudalle voidaan asettaa siten, että

(a) Mitkään kaksi tornia eivät uhkaa toisiaan? [3p]

(b) Jokaista tornia uhkaa korkeintaan yksi toinen torni? [3p]

Molemmissa kohdissa oikeasta vastauksesta saa [1p] ja oikeasta perustelusta [2p]. Torni on shakissa nappula, joka voi liikkua lähtöruudustaan mihin tahansa ruutuun joka on samalla rivillä tai sarakkeella.

**4.** Ympyrän  $P_1$  säde on 1 ja ympyrän  $P_2$  säde on 2. Piste  $A$  on ympyrällä  $P_1$  ja piste  $B$  ympyrällä  $P_2$  niin, että suora  $AB$  on ympyröiden  $P_1$  ja  $P_2$  sisäinen tangentti kuten kuvassa:



Tiedetään, että janan  $AB$  pituus on 6. Laske ympyröiden  $P_1$  ja  $P_2$  keskipisteiden välinen etäisyys. [6p]

**5.** Merkitään  $S(n)$ :llä positiivisen kokonaisluvun  $n$  kymmenjärjestelmäsesityksen numeroiden summaa, esim.  $S(123) = 1 + 2 + 3 = 6$ .

(a) Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut  $n$ , joille  $n = 3S(n)$ . [3p]

(b) Selvitä, mitä on  $S(S(S(S(2^{2020}))))$ . [3p]