

XXXI KESKI-SUOMEN LUKIOLAISTEN MATEMATIIKKAKILPAILU 25.1.2024

KIRJOITA JOKAISEN TEHTÄVÄN RATKAISU OMALLE VASTAUSPAPERILLEEN.

KIRJOITA NIMESI SELVÄSTI JOKAISEEN VASTAUSPAPERIIN.

PALAUTA NIMELLÄSI JA TEHTÄVÄNUMEROLLA VARUSTETTU VASTAUSPAPERI NIISTÄKIN TEHTÄVISTÄ, JOIHIN ET VASTAA.

MUISTA PERUSTELLA VASTAUKSESI, JOS TEHTÄVÄNANNOSSA EI MUUTA KÄSKETÄ.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin perustelematta vastaustasi.

- (a) Lieriön muotoisen uima-altaan pohjan pinta-ala on 80 m^2 . Jos altaassa on 160 000 litraa vettä, niin kuinka korkealla altaan vedenpinta on altaan pohjasta mitattuna? [1p]
- (b) Tuotteen hinta nousee ensin 100% ja jonkin ajan kuluttua hintaa nostetaan uudestaan 50%. Hinta nousee 13 euroa jälkimmäisessä hinnannostossa. Mikä oli tuotteen alkuperäinen hinta? [1p]
- (c) Positiivinen luku n on pienempi kuin 50 ja sen jakojäännös on 7:llä jaettaessa 3 ja 5:llä jaettaessa 2. Määritä n . [1p]
- (d) Mikä on suurin kokonaisluku, joka jakaa molemmat luvuista 2024 ja 759? [1p]
- (e) Sadan hengen joukossa on 50 sinisilmäistä, 25 ruskeasilmäistä ja 13 vihreäsilmiäistä henkilöä. Lisäksi näistä sadasta henkilöstä 54:llä on pitkät hiukset. Pitkähiuksisista henkilöistä sinisilmäisiä on 26 ja ruskeasilmäisiä on 13. Kuinka monta vihreäsilmiäistä pitkähiuksista henkilöä joukossa on vähintään? [1p]
- (f) Olkoon $P(x) = \frac{1}{2}(2 - x)^2$. Etsi polynomille $P(P(P(P(x))))$ ainakin yksi reaalinen nollakohta. [1p]

2. Palindromilla tarkoitetaan merkkijonoa, jonka merkkien järjestys on sama etu- ja takaperin luettuna. Kuinka monta 7-merkkistä palindromia voidaan muodostaa merkeistä

$$A, B \text{ ja } C,$$

jos ainakin kahden peräkkäisen merkin on oltava palindromissa samoja? Huomaa, että kaikkien merkkien ei tarvitse esiintyä jokaisessa palindromissa. Laske mukaan siis esimerkiksi merkkijonot

$$AABCBA \text{ ja } AACCCAA,$$

mutta älä merkkijonoja

$$ABCACBA \text{ tai } AABCABB.$$

[6p]

3. Kuudesta yhtenevästä tasakylkisen kolmion muotoisesta kangaspalasta ommellaan pyramidin muotoinen teltta, jonka pohja on säännöllinen kuusikulmio. Määritä kolmioiden kylkien pituudet, kun tiedetään, että teltan korkeus on 2 m ja kolmioiden kantojen pituudet ovat 1 m .

[6p]

4. Millä positiivisilla kokonaisluvuilla n luvut $1, 2, 3, \dots, n$ voidaan jakaa kahteen joukkoon siten että molemmissa joukoissa olevien lukujen summat ovat yhtäsuuret?

[6p]

5. Reaaliakselin osajoukko koostuu yli kymmenestä erillisestä välistä, joista jokaisen pituus on $\frac{1}{10}$. Osoita, että joukosta löytyy ainakin kaksi lukua, joiden erotus on kokonaisluku.

[6p]