Keski-Suomen lukiolaisten matematiikkakilpailu 15.1.2026

Kirjoita jokaisen tehtävän ratkaisu omalle vastauspaperilleen.
Kirjoita nimesi selvästi jokaiseen vastauspaperiin.
Palauta nimelläsi ja tehtävänumerolla varustettu vastauspaperi niistäkin tehtävistä, joihin et vastaa.
Muista perustella vastauksesi, jos tehtävänannossa ei muuta käsketä.

1. Vastaa tämän tehtävän kysymyksiin perustelematta vastauksiasi.

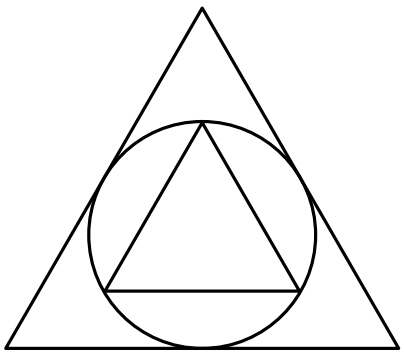
(a) Suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon särmien pituudet ovat a cm, b cm ja c cm. Laatikon tilavuus on $10\,\text{cm}^3$. Mikä on sellaisen suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon tilavuus, jonka särmien pituudet ovat $2a$ cm, $3b$ cm ja c cm? **[1p]**

(b) Anna on nyt kaksi kertaa niin vanha kuin Salla. Kymmenen vuoden päästä heidän ikiensä tulo on 20 kertaa niin suuri kuin heidän ikiensä summa on nyt. Anna on yli 15-vuotias. Kuinka vanhoja Anna ja Salla ovat nyt? **[1p]**

(c) Suolaliuoksen massa on 100 kg. Massasta 99 % on vettä ja 1 % suolaa. Liuoksesta haihdutetaan vettä, kunnes vettä on 98 % liuoksen kokonaismassasta. Mikä on liuoksen massa tällöin? **[1p]**

(d) Olkoon $m \geq 1$ ja $n \geq 1$ sellaisia kokonaislukuja, että $m + n = 2026$. Mikä on lausekkeen $\sqrt{mn}$ suurin mahdollinen arvo? **[1p]**

(e) Kuvassa on kaksi tasasivuista kolmiota, joista pienemmän kärjet ovat suuremman kolmion sisään piirretyn ympyrän kehällä. Mikä on kolmioiden pinta-alojen suhde? **[2p]**



Muista perustella vastauksesi tästä eteenpäin.

2.

(a) Laatikossa on 3 punaista, 4 sinistä ja 5 vihreää palloa. Valitset laatikosta kaksi palloa näkemättä palloja. Millä todennäköisyydellä valitset kaksi eri väristä palloa? **[3p]**

(b) Kahdeksan luvun keskiarvo on 15, ja osa luvuista on yhtäsuuria kuin viisi. Kun kaikki luvut, jotka ovat yhtäsuuria kuin 5 poistetaan, niin loppujen lukujen keskiarvo on 25. Montako lukua 5 oli? **[3p]**

3.

(a) Osoita, että jos valitaan 1014 eri kokonaislukua $a_1, \ldots, a_{1014}$ väliltä $1, 2, \ldots, 2026$, niin tästä kokoelmasta löytyy kaksi lukua a_i, a_j jotka toteuttavat ehdon $a_i + a_j = 2027$. **[3p]**

(b) Osoita, että ainoa enintään kolmannen asteen polynomi P joka toteuttaa ehdon

$$P(x^2 + 1) = x^3 P(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on vakiopolynomi $P(x) = 0$. **[3p]**

4. Pöydälle on asetettu yksi musta pallo ja n valkoista palloa, missä n on ei-negatiivinen kokonaisluku. Kaksi pelaajaa pelaa peliä, missä kumpikin pelaaja vuorotellen poimii joko 1 tai 2 haluamaansa palloa pois pöydältä. Pelaaja joka poimii mustan pallon häviää pelin. Millä luvun n arvoilla ensimmäisenä vuorossa olevalla pelaajalla on varma voittostrategia. **[6p]**

5. Tasossa on kolmio, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c, ja jonka ympäri piirretyn ympyrän säde on R.

(a) Osoita, että jos kolmio on suorakulmainen, niin $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$. **[2p]**

(b) Osoita, että jos $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$, niin kolmio on suorakulmainen. **[4p]**

