Metriset avaruudet
Harjoitus 2

1. (a) Osoita, että $\{0,1\}$-metriikka mielivaltaisessa joukossa X on todellakin metriikka.
   (b) Osoita, että nk. SNCF-metriikka $\mathbb{R}^2$:ssa,
   $$d(x,y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\|, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$
   on todellakin metriikka. (SNCF=Société nationale des chemins de fer français; "National society of French railways")

2. Määritä $\mathbb{R}^2$:n pallonkuori $S(\bar{0}, r)$, kun normina on $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

3. Määritä tason joukkojen $A = \{(x,y) : x^2 + 1 - y < 0\}$ ja $B = \{(x,y) : y < 0\}$ välinen etäisyys $d(A,B)$
   (a) tavallisessa,
   (b) $\{0,1\}$-metriikassa.

4. Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $G \subset X$ avoin, ja $F \subset G$ äärellinen. Todista, että $G \setminus F$ on avoin.

5. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $x_0 \in X$, $a \in X$. Määritellään funktio $f_a : X \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_a(x) = d(x,a) - d(x,x_0)$.
   (a) Osoita, että f_a on rajoitettu.
   (b) Kohdan (a) nojalla saadaan kuvaus $\varphi : X \to E = \mathrm{raj}(X,\mathbb{R})$, jossa $\varphi(a) = f_a$. Osoita, että $\|\varphi(a) - \varphi(b)\| \leq d(a,b)$, kun E:ssä on sup-normi.
   (c) Osoita, että itse asiassa $\|\varphi(a) - \varphi(b)\| = d(a,b)$ laskemalla funktion $\varphi(a) - \varphi(b)$ arvo a:ssa tai b:ssä.

   Tulos on *Kuratowskin upotuslause*, ja siitä seuraa, että jokainen metrinen avaruus voidaan etäisyydet säilyttäen kuvata jonkin normiavaruuden osajoukolle.

6. Keksi kurssin tähänastisiin aiheisiin liittyvä hyvin muotoiltu järkevä, mahdollisesti yleisluontoinen, kysymys laskarinpitäjälle. Palauta kysymys kirjallisena laskuharjoituksissa. Kysymykset ja vastaukset niihin tulevat kurssin kotisivuille.