

FYSP1082 / K2 TASAPOTENTIALIPINNAT

Työssä tutkitaan erilaisten, eri potentiaalissa olevien johdekappaleiden muodostaman sähkökentän potentiaalijakautumaa. Tehtävänä on etsiä joukko tasapotentialipintoja (2-ulotteisuus \Rightarrow tasapotentialiviivoja) ja piirtää niistä ja johdesysteemistä kuva millimetripaperille. Kuvan avulla voidaan tehdä erilaisia johtopäätöksiä kyseisen sähkökentän kenttäviivojen kulusta ja kentän voimakkuudesta sekä todeta niitä koskevien lakien paikkansapitävyys. Tasapotentialipintoja lasketaan myös numeerisia menetelmiä käyttäen.

1 LÄHTÖKOHDAT

Kertaa oppikirjasta Randall D. Knight luku ”Electric potential”. Asiaa on myös käsitelty kirjan Young & Freedman samannimisessä luvussa. Työhön liittyy kotitehtävä (sivulla 4), joka tulee olla tehtynä työtä tekemään tultaessa.

1.1 Elektrolyyttiallas

Jos kaksi täydellisesti johtavaa elektrodia sijoitetaan äärellisen johtokyvyn omaavaan, johtavaan äärettömän laajaan väliaineeseen, on potentiaalijakautuma (Laplacen yhtälön ratkaisu) sama kuin jos elektrodit muodostaisivat kondensaattorin (= kaksi mielivaltaista toisistaan eristettyä johdetta) ja väliaineena olisi eriste. Tämä seuraa siitä, että rajaehdot ovat samat kummassakin tapauksessa (elektrodien pinnat ovat aina tasapotentialipintoja).

Siis esimerkiksi tyhjiössä ovat kaksi johdekappaletta, joiden varaus on q ja $-q$ (välinen jännite $U=q/C$, C = kapasitanssi) aiheuttavat sähkökentän, joka on sama kuin jos väliaineena on johtavaa elektrolyyttiä ja johdekappaleiden välinen jännite pidetään ulkoisen jännitelähteen avulla U :na. Jälkimmäisessä tapauksessa systeemissä kulkee virta s.e.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

eli varaukset kulkevat kenttäviivoja pitkin ja virtaus tapahtuu periaatteessa äärettömässä alueessa siten, että virrantiheys \vec{j} on suoraan verrannollinen kenttävoimakkuuteen \vec{E} . Edellä mainitun perusteella voidaan sähköstaattisen kentän potentiaalijakautuma mitata vastaavasta sähkövirtauskentästä. Jälkimmäinen tapa valitaan mittausteknisistä syistä.

Jos systeemin symmetria on sellainen, että kentästä saadaan riittävän hyvä käsitys jo kaksiulotteisesta potentiaalijakautuman kuvasta (xy -tasossa), voidaan mittaukset suorittaa altaassa, jonka pohjalla on tasapaksu kerros elektrolyyttiä ja johon asetettujen elektrodien pinnat ovat z -akselin suuntaiset. Altaan äärellinen koko (xy -tasossa) aiheuttaa vääristymää potentiaalijakautumaan. Jos allas on eristetty, pyrkivät tasapotentialiviivat kääntymään altaan laidoilla kohtisuoraan altaan reunoja vastaan.

1.2 Relaksaatiomenetelmä

Alueessa, jossa ei ole varauksia, on voimassa Laplaceen yhtälö

$$\nabla^2 = 0.$$

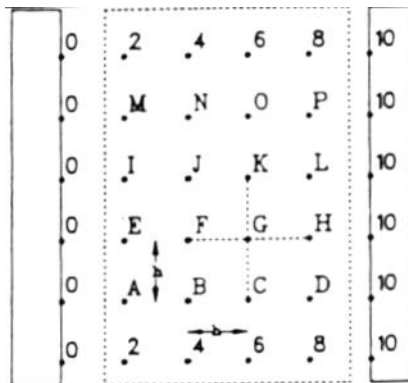
Systeemissä, joka koostuu eri potentiaaleissa olevista elektrodeista sekä varauksettomasta väliaineesta, potentiaali voidaan ratkaista ratkaisemalla Laplaceen yhtälö reunaehtoina elektrodit (siis potentiaali elektrodien pinnalla on vakio). Usein tämä on hyvin vaikea, ellei peräti mahdoton ratkaista analyyttisesti. Numeerisesti ratkaisu voidaan saada hyvinkin helposti, joskin se saattaa viedä melkoisesti aikaa, jos se tehdään käsin. Tietokoneella numeerinen ratkaisu saadaan kohtalaisen nopeasti.

Tarkastellaan seuraavassa niin kutsuttua **relaksaatiomenetelmää** kaksiulotteisen esimerkin valossa. Oletetaan että potentiaali ei riipu z :sta, joten Laplaceen yhtälö supistuu muotoon

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Olkoon tarkasteltavan alueen kaksi vastakkaista reunaa kiinteissä potentiaaleissa 0 V ja 10 V. Oletetaan lisäksi, että reunalla kenttäviivat ovat reunan suuntaiset (äärettömät elektrodit). Tarkoituksena on määrittää potentiaali muualla alueessa. Ratkaisu on triviaali, sillä kyseessä on

(ääretön) kondensaattori, missä potentiaali muuttuu lineaarisesti 0:sta 10:en volttiin. Ratkaistaan kuitenkin ongelma myös numeerisesti. Jaetaan alue tasaväliseksi hilaksi (katso kuva 1.).



Kuva 1. Tasavälinen hilapisteistö Laplacen yhtälön numeerista ratkaisua varten.

Tarkastellaan potentiaalia pisteen G ympäristössä. Jos potentiaali sekä sen derivaatat pisteessä G tunnetaan, voidaan potentiaali sen ympäristössä laskea Taylorin kehitelmän avulla. Tällöin potentiaali pisteissä F , H , C ja K voidaan kirjoittaa:

$$\phi_F = \phi_G - h \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_G + \frac{1}{2} h^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_G + \dots$$

$$\phi_H = \phi_G + h \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_G + \frac{1}{2} h^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_G + \dots$$

$$\phi_C = \phi_G - h \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_G + \frac{1}{2} h^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right]_G + \dots$$

$$\phi_K = \phi_G + h \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_G + \frac{1}{2} h^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right]_G + \dots$$

Jos hila (pistejoukko) on kyllin tiheä (h pieni), voidaan korkeamman kertaluvun termit jättää huomiotta. Laskemalla yllä olevat yhtälöt yhteen ja käyttämällä Laplacen yhtälöä saadaan

$$\phi_C + \phi_F + \phi_H + \phi_K = 4\phi_G$$

eli

$$\phi_G = \frac{1}{4}(\phi_C + \phi_F + \phi_H + \phi_K) \quad (2)$$

Tämä yhtälö ei ole tarkka, sillä olemme jättäneet kolmannen ja korkeamman asteen termit pois. Virhettä voidaan pienentää pienentämällä pisteiden välimatkaa.

Tämän laskun helpottamiseksi asetamme reunan pisteiden potentiaalit oikeiksi, koska tiedämme ne jo analyttisesti. Näin vältymme reunapisteiden potentiaalilaskemisesta, missä tarvitsisimme potentiaaleja alueen ulkopuolella. Yleisessä tapauksessa reuna-alueen käsittely vaatii tietoa reunaehdoista (tapaukset, joissa kenttäviivat ovat joko reunan suuntaiset tai kohtisuorassa reunaa vastaan, ovat laskennallisesti helppoja).

Asetetaan aluksi pisteiden A - P potentiaaliksi 0 V ja aloitetaan yhtälön 2 soveltaminen pisteestä A eli

$$\phi_A = \frac{1}{4}(0 + 2 + \phi_E + \phi_B) = 0,5$$

Samalla tavalla

$$\phi_B = \frac{1}{2}(4 + \phi_A + \phi_F + \phi_C)$$

Käyttämällä ϕ_A :lle viimeksi saatua arvoa $0,5$ saadaan $\phi_B = 1,125$. Näin jatketaan läpi koko pistejoukon ja aloitetaan alusta (tai lasketaan seuraava kierros vastakkaisessa järjestyksessä). Pistejoukko käydään läpi niin monta kertaa, että potentiaalilaskemisen yhtälö 2 pitää paikkaansa jokaisessa pisteessä halutulla tarkkuudella. Käsitellyssä esimerkissä ratkaisu poikkeaa tarkasta ratkaisusta n yhden prosentin 18 iteraatiokierroksen jälkeen.

Edellä esitettyä menetelmää voi käyttää myös kolmeulotteisten ongelmien ratkaisussa. Siinä tapauksessa kunkin pisteen potentiaalilaskemiseksi on käytettävä kuuden naapuripisteen arvoa (kaksi joka suuntaan).

Relaksaatiota voi aluksi kiihdyttää ns. ylirelaksaatiolla (over relaxation), missä kierroksella n pisteelle saadaan arvo lausekkeesta

$$\phi(n) = \phi(n-1) + r[\phi(\text{laskettu}) - \phi(n-1)]$$

missä $\phi(\text{laskettu})$ saadaan yhtälöllä 2 ja r on relaksaatiotekijä ($1 \leq r \leq 2$). Relaksaatiotekijän ollessa 1 saadaan tavallinen relaksaatio. Relaksaation edetessä on syytä pienentää relaksaatiotekijän arvoa lopullisen arvon ollessa 1. Tyypillinen r :n aloitusarvo on 1,6 -1,9. Liian suuri relaksaatiotekijän arvo johtaa relaksaation oskillointiin sekä epästabiilisuuteen.

Toinen tapa kiihdyttää relaksaatiota aluksi on laskea potentiaali vain joka toisessa pisteessä molemmissa suunnissa ja ottaa poisjätetyt pisteet mukaan myöhemmin. Harvennuksia voi luonnollisesti tehdä useampiakin, mutta silloin saattaa laskuista jäädä pois kokonaisia elektrodeja, mikäli elektrodit koostuvat vain muutamasta hilapisteestä.

Edellä olevassa on potentiaalia laskettaessa käytetty naapuripisteille viimeksi saatua arvoa (kierrokselta n tai $n-1$). Yksinkertaisin tapa olisi käyttää nk. Jacobin menetelmää, missä kierroksella n käytetään naapuripisteille kierroksella $n-1$ saatuja potentiaaleja. Tämä menetelmä on melko hidas, sillä relaksaatio etenee vain yhden hilapisteen välin kierroksella, kun taas nk. Gauss-Seidel menetelmä, missä käytetään aina viimeisintä arvoa, relaksoituu nopeammin (method of successive relaxation). Gauss-Seidel menetelmä nopeutuu edelleen, kun käytetään ylirelaksaatiota (point successive over relaxation).

Voit lukea relaksaatiomenetelmistä lisää esimerkiksi kirjasta Joel H. Ferziger: "Numerical Methods For Engineering Application".

Kotitehtävä (tehdään ennen mittauksia):

Relaksaatiomenetelmän ymmärtämiseksi lasketaan itse muutama kierros yksiulotteiselle systeemille, jonka päissä olevat pisteet ovat kiinteissä potentiaaleissa $+U$ ja $-U$. Hilapisteitä voi olla esimerkiksi 5. Käytä vertailun vuoksi naapuripisteille

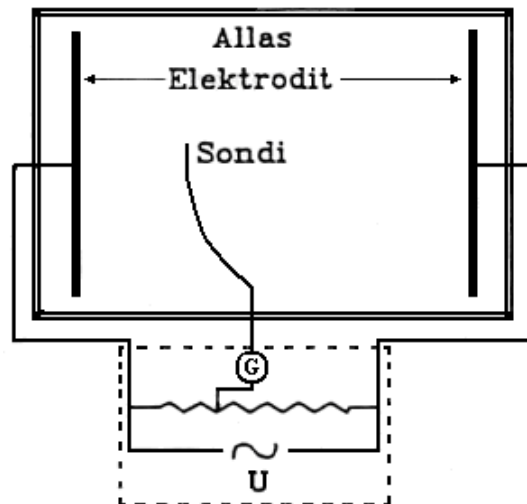
a) edellisellä kierroksella ($n-1$) saatuja arvoja tai

b) viimeksi saatua arvoa (joko kierrokselta n tai $n-1$ riippuen laskentajärjestyksestä)

ja totea sen vaikutus relaksaation etenemisnopeuteen. Jälkimmäisessä tapauksessa voit myös vertailla tuloksia laskiessasi joka kierroksella suuntaan $1 \rightarrow 5$ tai vaihtelemalla suuntaa kierrosten välillä. Vaikuttavatko muutokset laskumenetelmässä lopputulokseen?

2 MITTAUSLAITTEISTO

Ammeena toimii läpinäkyvä tasapohjainen akryylilaatikko, jonka pohjalla on tasapaksu kerros elektrolyyttinä käytettävää vesijohtovettä. Mittaukset suoritetaan laatikon keskiosassa, jossa reunojen kenttään aiheuttama vääristymä ei ole vielä kovin suuri. Mittaussysteemin kaaviokuva on esitetty kuvassa 2.



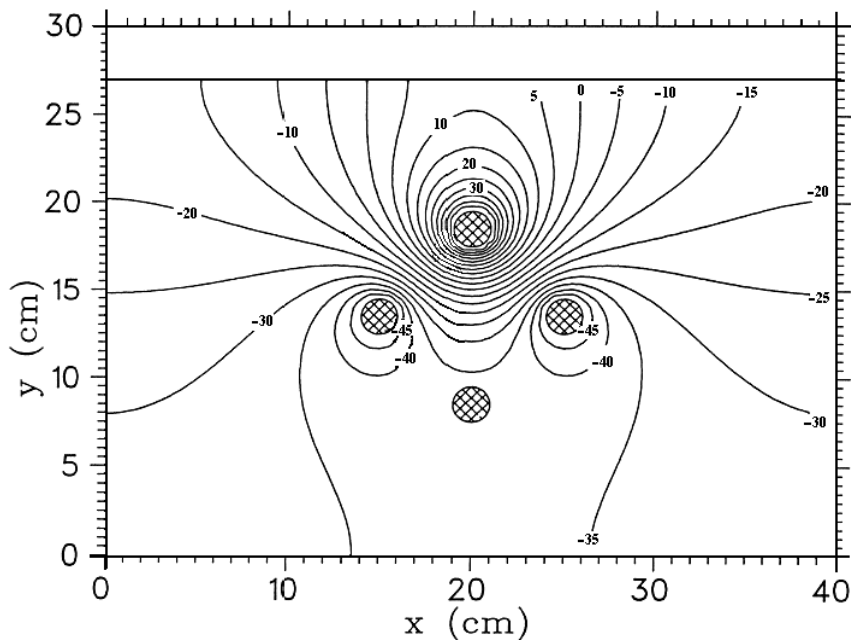
Kuva 2. Mittaussysteemi.

Mittaus on periaatteessa siltamittaus, jossa potentiometrin (Helipot) liuku asetetaan etsittävään potentiaaliin (suhteessa elektrodeihin). Etsintä tapahtuu sondilla, jota liikutellaan astian pohjaa pitkin, kohtisuoraan pohjaa vastaan. Sondin ollessa potentiometrissä asetetussa potentiaalissa (vastaavalla tasapotentiaaliviivalla) ei galvanometrin kautta kulje virtaa $I_{galv} = U_{galv} / R_{galv} = 0$.

3 TYÖN SUORITUS

Työssä kytketään elektrodien välille potentiaaliero U (noin $5V$) ja etsitään tasapotentiaaliviivat, joiden välinen potentiaaliero on $0,1U$ potentiaalista $0,1U$ alkaen ($0,1U =$ yksi Helipotin kierros). Huomaa erikoisesti, että U :n absoluuttisella arvolla ei ole merkitystä siltamittauksen vuoksi. Jos kenttään on asetettu irrallinen johdekappale, etsitään myös sen potentiaali ja vastaava tasapotentiaaliviiva. Laatikon pohjan alle on asetettu millimetripaperi (varaathan millimetripaperia mukaasi työosastolle tullessasi), joten siirtämällä sondia sopivin välein tasapotentiaaliviivalla ja

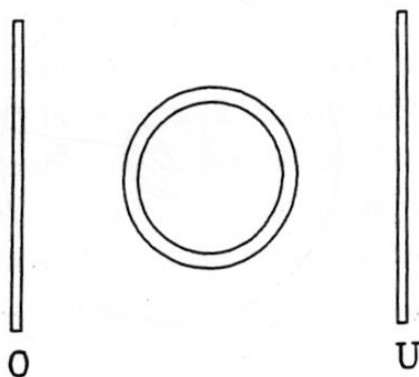
katsomalla kärjen kohdalta (x,y) -koordinaatit saadaan pistejoukko, johon sovitetaan tasapotentiaaliviivan kuva (esimerkki: kuva 3).



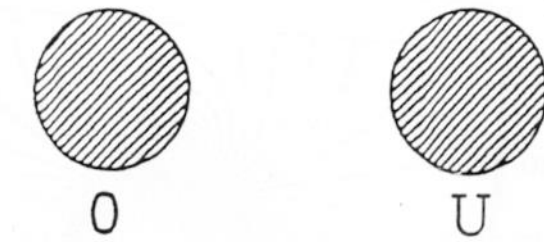
Kuva 3. Esimerkki tasapotentiaalipinnoista.

1) Piirretään kuva seuraavista elektrodisysteemeistä ja vastaavista tasapotentiaaliviivoista.

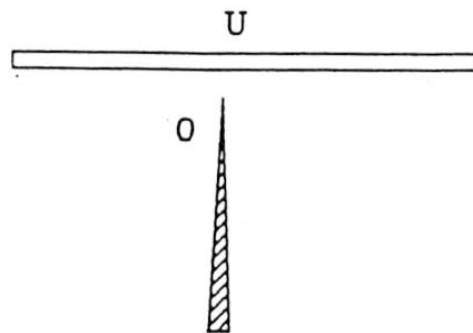
a) Johderengas homogeenisessa sähkökentässä: Totea ensin kentän homogeenisuus ilman johdetta. Mittaa potentiaali myös renkaan sisällä.



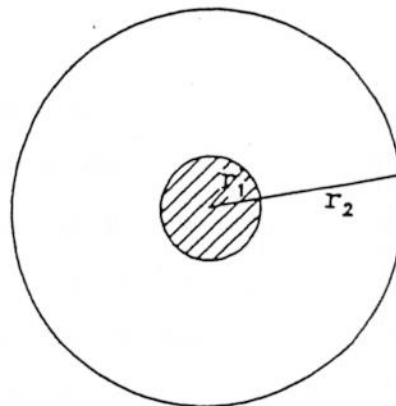
b) Dipolin kenttä (napojen lähellä)



c) Kenttä tasaisen elektrodin ja kärjen välillä:



2) Kahden sisäkkäisen sylinterimäisen johdekappaleen välissä olevan kentän potentiaalin riippuvuus etäisyydestä keskipisteestä:



$$E = \text{vakio}_1 \cdot \frac{1}{r}, \quad U(r) = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \text{vakio}_1 \cdot \ln r + \text{vakio}_2$$

Etsitään kymmentä eri U :n arvoa vastaava etäisyys r ja piirretään pistejoukko $(\ln r, U)$ ja katsotaan vastaako tulos laskettua kaavaa.

- 3) Lasketaan TASAPOTENTIAALI -tietokoneohjelmalla potentiaali-jakaumat kohdille 1.b) ja 1.c). Kuinka saat laskettua sähkökentän kussakin pisteessä? Jos et ehdi tehdä tätä osiota työvuoron aikana, tee se muuna aikana ja palauta kaavake liitteineen työn ohjaajalle tarkastettavaksi.

4 TASAPOTENTIAALI -ohjelma

TASAPOTENTIAALI -ohjelma on käytettävissä fysiikan laitoksen mikrotietokoneluokan koneissa (kolmas kerros, huone FL 349). Ohjelman pikakuvake löytyy työpöydältä nimellä ”tasapot-r2d”.

Ohjelma ratkaisee Laplacen yhtälöä $40\text{cm} \times 28\text{cm}$ kokoisessa alueessa, missä reunat ovat eristettä (vastaa työosaston elektrolyyttiallasta). Hilapisteet ovat puolen sentin välein (81×59 pistettä). Voit sijoittaa alueeseen korkeintaan 100 suorakaiteen muotoista sekä korkeintaan 100 ympyrän muotoista elektrodia. Kelluvien johdekappaleiden käyttö ei ole mahdollista, vaan kullekin elektrodille on määriteltävä tietty nollasta poikkeava potentiaali.

Ohjelmassa voit edetä vaiheittain. Kussakin vaiheessa voit antaa iteraatiokierrosten lukumäärän, relaksaatiotekijän sekä harvennusten lukumäärän. Voit myös käydä läpi pisteet kahteen suuntaan (vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan sekä päinvastoin). Tällöin iteraatioiden lukumäärä kaksinkertaistuu. Kunkin vaiheen jälkeen ohjelma ilmoittaa residuaalin sekä suurimman potentiaalimuutoksen kahden viimeisen kierroksen välillä. Residuaali ε on

$$\varepsilon = \frac{\sum_i (\phi_i^{(n)} - \phi_i^{(n-1)})^2}{\sum_i (\phi_i^{(n-1)})^2}$$

Jos haluat jatkaa, ohjelma pyytää uudelleen iteraatioiden lukumäärän, relaksaatiotekijän sekä harvennusten lukumäärän. Ohjelman tuottamat kuvat tulostuvat tietokoneluokan laserille.

Ohjelmasta ei ole olemassa erillistä käyttöohjetta, koska se on interaktiivinen ja kyselee itse tarvitsemansa tiedot. Käyttäjä voi laskennan aikana muuttaa laskentamenetelmää. Päävalikosta löytyvät seuraavat toiminnot:

0. LOPETA. Ohjelmasta siirrytään käyttöjärjestelmätilaan.

1. MÄÄRITTELE ELEKTRODIT. Ohjelma kyselee interaktiivisesti mm. seuraavat elektrodien määrittelyyn liittyvät asiat:

- Elektrodien lukumäärä, geometria sekä potentiaali: Suorakaiteen muotoisille elektrodeille annetaan X :n ja Y :n ala- sekä ylärajat. Jos haluat "viiva-elektrodin", anna ala- ja yläraja samaksi. Suorakaiteen muotoisen elektrodin sivujen suunnat ovat aina X - ja Y -akselien suuntaiset. Vinoja elektrodeja voit koota limittäin menevistä elektrodeista - muista antaa sama potentiaali. Ympyrän muotoisille elektrodeille annetaan keskipiste (X_0, Y_0) sekä säde (R_0) . Kaikki mitat ovat samoissa yksiköissä (cm). Elektrodit voivat olla päällekkäin. Viimeksi määritelty potentiaali kullekin pisteelle on voimassa. Elektrodit voivat mennä osittain myös alueen ulkopuolelle, mutta laskuissa ne katkaistaan alueen reunalla (näin voit esimerkiksi määrittellä alueen reunalla olevan puoliympyrän muotoisen elektrodin).
- Huomaa, että voit konstruoida myös onttoja elektrodeja määrittelemällä "ilmaa". Esimerkkinä olkoon rengas, jonka ulkosäde on $10,5cm$ ja sisäsäde $10,0cm$. Rengas rakennetaan siten, että ensin määritellään ympyräelektrodi, jonka säde on $10,5cm$ ja sitten ympyrän muotoinen alue ilmaa, jolla on sama keskipiste kuin em. elektrodilla ja jonka säde on $10cm$. Määrittelyjärjestys on oltava nimenomaan tämä, koska viimeksi tehty määrittely kumoaa aina edellisen.

2. LASKE POTENTIAALI. Ennen kuin ohjelma alkaa ratkaista ongelmaa, se kysyy seuraavia numeriikkaan liittyviä asioita:

- Iteraatioiden lukumäärä sekä laskemisjärjestys (yhteen suuntaan tai edestakaisin). Edestakaisin laskettaessa iteraatioiden lukumäärä kaksinkertaistuu.
- Harvennuksien lukumäärä (0, 1, 2 tai 3). Harvennukselle kannattaa käyttää arvoa 0, sillä muuten kuvista tulee varsin epäselviä. Harventamattoman hilan pisteiden välimatka on $0,5cm$.

- Relaksaatiotekijän r arvo. Muista, että $1 \leq r \leq 2$. Turvallinen valinta on määrittellä $r = 1$. Todettakoon, että nykyiset tietokoneet selviävät tämäntyyppisestä numeerisesta ongelmasta verraten nopeasti.
 - Käytetäänkö naapuripisteille viimeisintä arvoa vai edellisellä kierroksella saatua arvoa. Ohjelma käyttää näistä nimityksiä VANHOJA vai UUSIA arvoja.
3. NÄYTÄ POTENTIALIPINTA. Ohjelma avaa grafiikkaikkunan, jossa voit katsella laskettua potentiaalipintaa kolmiulotteisena. Pääohjelman valikkoon pääset klikkaamalla hiiren oikeanpuoleista näppäintä.
 4. NÄYTÄ TASA-ARVOKÄYRÄT. Grafiikkaikkunassa nähdään 2-ulotteinen kuva laskenta-alueen tasapotentialiviivoista. Päävalikkoon siirrytään painamalla hiiren oikeaa näppäintä.
 5. TULOSTUKSEN ESIKATSELU. Grafiikkaikkunassa nähdään kohtien 3 ja 4 kuvat samalle arkille piirrettyinä. Päävalikkoon siirrytään jälleen hiirellä.
 6. TULOSTA KUVAAJAT. Kuvat tulostuvat tietokonehuokan laserille. Käytä mahdollisimman paljon ohjelman tarjoamia esikatselumahdollisuuksia turhien tulostusten välttämiseksi. Jos ohjelma kaatuu tulostusvaiheessa, kuvatiedosto jää hakemistoon C:\\temp nimellä relax2d.ps, ja se voidaan tulostaa erikseen esim. GSWIEW-ohjelman avulla.