

Fysiikan valintakokeen 11.6.2013 klo 10-13 ratkaisut

1. Auto lähtee levosta hetkellä $t = 0$ ympyrän muotoiselle vaakasuoralle radalle tasisella tangenttikiihtyvyydellä $a_t = 2,34 \text{ m/s}^2$. Oleta, että tien pinta kohdistaa kaikkiin renkasiin yhtäsuuren kitkavoiman ja että niin kauan kuin auto ei luisu, kiihtyvyyden antaa lepokitka. Auton renkaiden ja tienpinnan väliset lepo- ja liikekitkakertoimet ovat $\mu_s = 0,56$ ja $\mu_k = 0,45$ ja radan säde $r = 123 \text{ m}$.
 - a) Osoita, että auto alkaa luisua hetkellä $t = 10,6 \text{ s}$. [3p]
 - b) Oleta, että luisuminen kestää yli 2 s ja esitä graafisesti kitkavoiman suuruus ajan funktiona välillä 0-12 s, kun auton massa on 1340 kg. [4p]
 - c) Auton taustapeiliin on ripustettu maskotti. Missä kulmassa pystysuoraan nähdän on maskotin ripustuslanka juuri ennen luisumisen alkamista? [3p]

Ratkaisu:

- a) Auton kokonaiskiihtyvyys $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, missä normaalikiihtyvyys a_n kasvaa vauhdin kasvaessa.

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(a_t t)^2}{r}.$$

Kiihtyvyyden aiheuttaa renkaiden ja tienpinnan välinen kitka, joka on alussa lepokitkaa. Luisuminen alkaa, kun lepokitka saavuttaa maksimiarvonsa $\mu_s mg$. Newtonin toisen lain nojalla tästä saadaan maksimikiihtyvyys $a = \mu_s g$. Kun tämä yhtälö kirjoitetaan auki, voidaan ratkaista

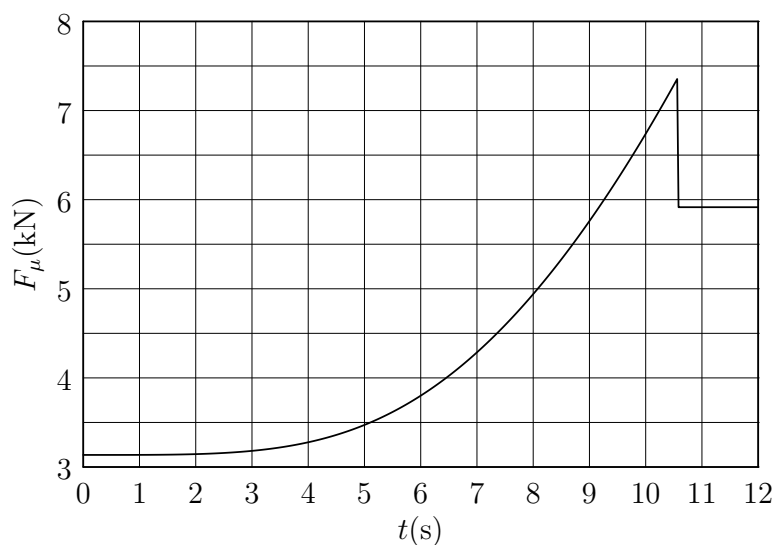
$$t = \frac{\sqrt[4]{(\mu_s^2 g^2 - a_t^2) r^2}}{a_t} = 10,6 \text{ s}$$

Voidaan osoittaa myös laskemalla kokonaiskiihtyvyys hetkellä $t = 10,6 \text{ s}$ ja toteamalla, että se on yhtäsuuri kuin maksimikiihtyvyys $\mu_s g = 5,5 \text{ m/s}^2$.

- b) Alussa kitkavoima $F_\mu = ma$

$$F_\mu = ma_t \sqrt{1 + \left(\frac{a_t}{r}\right)^2} t^2,$$

kunnes luisumisen alettua muuttuu liikekitkaksi $\mu_k mg$, joka on vakio (ei riipu oleellisesti renkaiden ja tienpinnan välisestä nopeudesta).



- c) Juuri ennen luisumisen alkua kokonaiskiiltovyvyys $a = \mu_s g$. Maskotin vapaa-kappalekuviosta saadaan $\tan \alpha = a/g = \mu_s \Leftrightarrow \alpha = 29^\circ$
2. Maalari on kiinnittänyt räystäälle kitkattoman ja massattoman väkipyörän, jonka kautta kulkee massaton köysi. Köyden toinen pää on oheisen kuvan mukaisesti kiinnitetty maalarin turvavaljaisiin ja toisesta päästä vetämällä hän säätelee korkeuttaan (kuva). Oleta, että köyden molemmat päät ovat pystysuorassa. Maalarin massa valjaineen on 87,6 kg ja putoamiskiiltovyvyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.
- Kuinka suuri voima maalarin pitää kohdistaa köyteen roikkuakseen paikoillaan? [2p]
 - Kuinka suurella voimalla hänen pitää kiskoa köyttä edetäkseen vakiovauhdilla ylöspäin? [1p]
 - Laske 12,3 m:n nousuun vaadittava työ energiaperiaatteella. [2p]
 - Laske c-kohdan työ köyteen kohdistetun voiman tekemänä työnä. [2p]
 - Ollessaan 12,3 m:n korkeudella maalari kääntää kaveria kiinnittämään köyden alapäähän 76,5 kg:n punnuksen, jonka jälkeen hän irrottaa otteensa köydestä. Millä nopeudella hän tömähtää maahan, jos punnuksen paino kohdistuu köyden toiseen päähän koko alastulon ajan? [3p]



Ratkaisu:

- a) Väkipyörän kummaltakin puolelta tulevaan köyteen kohdistuu puolet maalarin painosta

$$F = \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2} \cdot 87,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 430 \text{ N.}$$

- b) Vakiovauhdin ylläpitämiseen tarvitaan sama voima kuin paikoillaan olemiseen

$$F = 430 \text{ N.}$$

- c) Työ on yhtä suuri kuin potentiaalienergian lisäys

$$W = mg\Delta h = 87,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 12,3 \text{ m} = 10,6 \text{ kJ.}$$

- d) Työ on voima kerrottuna matkalla. Noustakseen 12,3 m pitää maalarin kiskoa köyttä $2 \cdot 12,3 \text{ m} = 24,6 \text{ m}$

$$W = Fs = 430 \text{ N} \cdot 24,6 \text{ m} = 10,6 \text{ kJ.}$$

- e) Olkoon köyden jännitysvoima T , maalarin massa m_1 ja punnuksen massa m_2 . Newtonin toisen lain mukaiset yhtälöt ovat

$$\left. \begin{array}{l} m_1g - T = m_1a \Rightarrow T = m_1(g - a) \\ T - m_2g = m_2a \Rightarrow T = m_2(g + a) \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g = 0,664 \text{ m/s}^2.$$

Vauhti saadaan kiihtyvyyden ja matkan avulla yhtälöstä

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 0,6636 \cdot 12,3} \text{ m/s} = 4,04 \text{ m/s.}$$

3. Veden ja jään ominaislämpökapasiteetit ovat $4,19 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ja $2,09 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ja veden ominaissulamislämpö on $333 \text{ kJ}/\text{kg}$.

- a) Dieettiguru kehoittaa juomaan jäävettä, koska elimistö joutuu polttamaan rasvaa lämmittääkseen nolla-asteisen veden 37 -asteiseksi. Kuinka paljon sinun pitäisi juoda jäävettä polttaaksesi 112 g rasvaa, kun yhden rasvakilon polttaminen tuottaa 38 MJ lämpöä? [5p]
- b) Laihduttaja kuvittelee voivansa syödä jäätelöä lihomatta, kunhan se vain on riittävän kylmää. Kilogramma jäätelöä tuottaa ravintona $5,40 \text{ MJ}$ lämpöä. Kuinka kylmänä jäätelö pitäisi syödä, jotta siitä ei tulisi nettoenergiaa, jos oletetaan, että jäätelön ominaislämpökapasiteetit ja ominaissulamislämpö ovat samat kuin vedellä ja jäällä? [5p]

Ratkaisu:

- a) Rasvan polttamisesta saadulla lämpöenergialla Q lämmitetään m -massaista vesimäärää 37 astetta

$$Q = mc\Delta T \Leftrightarrow m = \frac{Q}{c\Delta T} = \frac{(0,112 \cdot 38 \cdot 10^6)}{(4,19 \cdot 10^3 \cdot 37)} \text{ kg} = 27 \text{ kg.}$$

- b) Jäätelön lämpiäminen kiinteänä vaatii lämpömäärän $Q_1 = mc_j(0 - T_j)$, sulaminen lämpömäärän $Q_2 = ms$ ja lämpiäminen nesteinä lämpömäärän $Q_3 = mc_v(T_v - 0)$, missä c_j ja c_v ovat jään ja veden ominaislämpökapasiteetit, s on veden ominaissulamislämpö, T_j on syötävän jäätelön lämpötila ja $T_v = 37^\circ\text{C}$. Jäätelö ei tuota nettoenergiaa, jos kokonaislämpömäärä $Q_1 + Q_2 + Q_3$ on yhtä suuri kuin jäätelön antama energia $Q = mh$, missä h on jäätelön lämpöarvo $5,40 \cdot 10^6 \text{ J}/\text{kg}$.

$$mh = mc_j(0 - T_j) + ms + mc_v(T_v - 0) \Leftrightarrow T_j = \frac{s + c_vT_v - h}{c_j} = -2350^\circ\text{C.}$$

Laihduttaja joutuu pettymään karvaasti, sillä tavoiteltu lämpötila on tavoittamattomissa.

4. Urkupillit ovat joko avoimia (molemmista päistä avoimia) tai tukittuja (toisesta päästä avoimia ja toisesta päästä suljettuja) putkia. Tarkastellaan urkupillä, jonka pituus on 78,9 cm.

- Piirrä kuva perussävelen ja ensimmäisen harmonisen yläsävelen muodostumisesta avoimeen pilliin ja laske vastaavat taajuudet lämpötilassa 3°C , kun äänen nopeus ilmassa on 333 m/s tässä lämpötilassa? [4p]
- Toista a-kohta tukitulle pillille. [4p]
- b-kohdan pillin on tarkoitus soida A -sävelellä, niin että perussävelen taajuus $f_1 = 110$ Hz. Missä lämpötilassa tämä toteutuu, kun äänen nopeus ilmassa on suoraan verrannollinen absoluuttisen lämpötilan neliöjuureen? [2p]

Ratkaisu:

- Avoimen putken molempiin päihin muodostuu kupu. Kahden solmun välimatka on puoli aallonpituutta $\lambda/2$. Koska kuvut ovat solmujen puolivälissä, on kuvun ja solmun välimatka $\lambda/4$. Äänen taajuus $f = v/\lambda$, missä v on äänen nopeus. Perussävelessä on keskellä yksi solmu, jolloin putken pituus $L = \lambda_1/2$ ja

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} = \frac{333 \text{ m/s}}{2 \cdot 0,789 \text{ m}} = 211 \text{ Hz.}$$

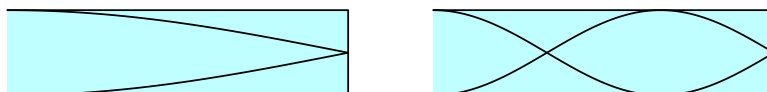
Ensimmäisessä harmonisessa yläsävelessä on kaksi solmua, jolloin $L = \lambda_2$ ja taajuus $f_2 = 2f_1 = 422$ Hz.



- Tukitun pillin suljettuun päähän muodostuu solmu ja avoimeen päähän kupu. Perussävelessä on solmu vain tukituspaikassa, jolloin $L = \lambda_1/4$ ja

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L} = \frac{333 \text{ m/s}}{4 \cdot 0,789 \text{ m}} = 105,5 \text{ Hz} \approx 106 \text{ Hz.}$$

Ensimmäisessä harmonisessa yläsävelessä on yksi solmu, jolloin $L = (3/4)\lambda_2$ ja taajuus $f_2 = 3f_1 = 317$ Hz.

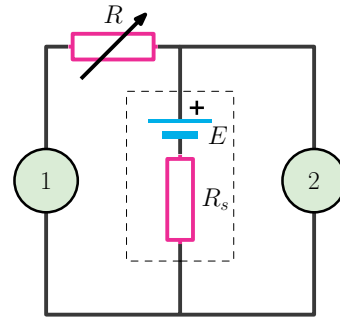


- Äänen nopeus kaasussa on verrannollinen absoluuttisen lämpötilan neliöjuureen. Lämpötilassa $T = (273 + 3)$ K b-kohdan pillin perustaajuus $f_1 = 105,5$ Hz. Tästä saadaan verranto

$$\frac{f_1(T')}{f_1(T)} = \frac{\sqrt{T'}}{\sqrt{T}} \Leftrightarrow T' = \left[\frac{f_1(T')}{f_1(T)} \right]^2 T = \left(\frac{110}{105,5} \right)^2 276 \text{ K} = 300 \text{ K} = 27^{\circ}\text{C}.$$

5. Akun napajännitettä mitattiin akun läpi kulkevan virran funktiona. Käytössä oli jännitemittari, virtamittari ja säätövastus. Mittaukset tehtiin oheisen kuvan mukaisella kytkennällä ja havainnot ovat oheisessa taulukossa.

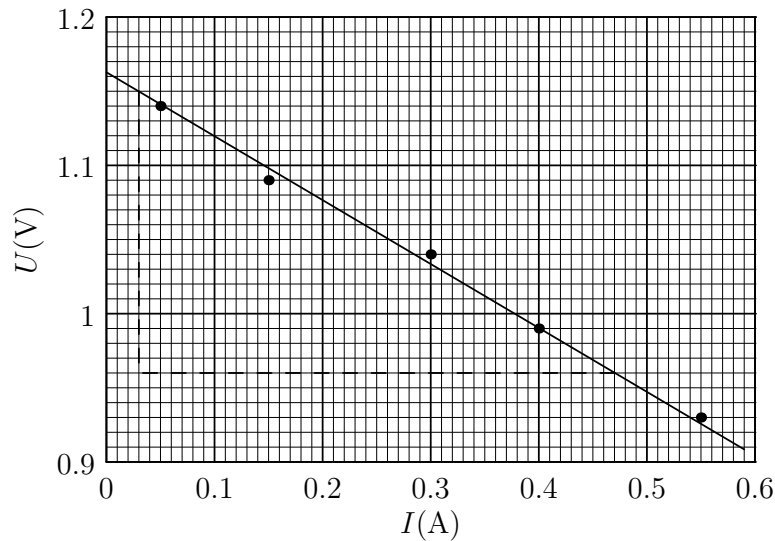
$I(\text{mA})$	50	150	300	400	550
$U(\text{V})$	1,14	1,09	1,04	0,99	0,93



- Kumpi kytkennässä esiintyvistä mittareista 1 ja 2 on jännitemittari? [2p]
- Esitä graafisesti napajännite virran funktiona. [3p]
- Määritä kuvaajan perusteella akun sisäinen resistanssi R_s ja lähdejännite E olettaen, että jännitemittarin sisäinen resistanssi on ääretön. [3p]
- Huomaat, että jännitemittarin sisäinen resistanssi onkin vain $7,89 \Omega$. Määritä c-kohdassa määritetyt suureet uudestaan ottamalla tämä huomioon. [2p]

Ratkaisu:

- Mittari 2 on jännitemittari.
-



- Jos jännitemittarin virta on nolla, on napajännite muotoa

$$U = E - IR_s \Rightarrow R_s = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{(0,96 - 1,15) \text{ V}}{(0,47 - 0,03) \text{ A}} = 0,43 \Omega.$$

Lähdejännite $E = U(0) = 1,16 \text{ V}$.

- Jos merkitään jännitemittarin virtaa ja resistanssia tunnuksin I_U ja R_U ja akun sisäistä resistanssia ja lähdejännitettä tunnuksella R'_s ja E' , c-kohdan yhtälö tulee muotoon

$$U = E' - (I + I_U)R'_s = E' - \left(I + \frac{U}{R_U}\right)R'_s \Leftrightarrow U = \frac{E' - IR'_s}{1 + \frac{R'_s}{R_U}}.$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$-\frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{R'_s}{1 + \frac{R'_s}{R_U}} = R_s \Leftrightarrow R'_s = \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{R_U}} = 0,45 \Omega.$$

Nyt lähdejännite $E' = (1 + R'_s/R_U)U(0) = 1,2 \text{ V}$.

6. He-Ne-laserin punainen valo, jonka aallonpituus $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, syntyy siirtymässä kahden neonin energiatilan välillä. Tarkastellaan He-Ne-laseria, jonka valoteho on $1,23 \text{ mW}$.

- Mikä on tilojen energiaero jouleina ja elektronivolteina, kun valon nopeus tyhjiössä on $2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ja alkeisvaraus on $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$? [3p]
- Kuinka monta fonia laser tuottaa sekunnissa? [2p]
- Mikä on valon intensiteetti, jos lasersäteen halkaisija on $0,76 \text{ mm}$? [2p]
- Fotonilla on liikemäärä h/λ , missä $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Kuinka suuren säteily-paineen lasersäde aiheuttaa, jos se osuu kohtisuoraan täydellisesti heijastavaan pintaan? [3p]

Ratkaisu:

- a) Tilojen energiaero on fotonin energia

$$\Delta E = hf = h \frac{c}{\lambda} = 3,139 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \frac{3,139 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 1,960 \text{ eV}.$$

- b) Energia on teho kerrottuna ajalla $E = Pt = 1,23 \text{ mJ}$. Jos N kappaletta fotoneja tuottaa tämän energian, voidaan kirjoittaa

$$1,23 \text{ mJ} = N \cdot 3,139 \cdot 10^{-19} \text{ J} \Leftrightarrow N = \frac{1,23 \cdot 10^{-3} \text{ J}}{3,139 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 3,92 \cdot 10^{15}.$$

- c) Intensiteetti on teho jaettuna säteen poikkipinta-alalla. Koska poikkipinnasta tiedetään vain halkaisija, oletetaan pyöreä poikkipinta, jolloin $A = \pi(0,76 \text{ mm}/2)^2 = 4,54 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$.

$$I = \frac{P}{A} = \frac{1,23 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{4,54 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2} = 2,7 \text{ kW/m}^2.$$

- d) Heijastuminen tarkoittaa kimmoista törmäystä, jossa liikemäärä muuttuu vastakkaiseksi $\Delta p = 2p = 2h/\lambda = 2,09 \cdot 10^{-27} \text{ kgm/s}$. Voima $F = \Delta p/\Delta t$. Keskimääräinen liikemäärän muutos sekunnissa on Δp kerrottuna b-kohdassa lasketulla fotonien lukumäärällä N ja paine on voima jaettuna poikkipinta-alalla

$$\frac{F}{A} = \frac{N\Delta p}{A} = \frac{3,92 \cdot 10^{15} \cdot 2,09 \cdot 10^{-27}}{4,54 \cdot 10^{-7}} \text{ Pa} = 18,0 \mu\text{Pa}.$$

Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää paineelle valmista kaavaa $2I/c$, joka antaa saman tuloksen.