

XXVII Keski-Suomen lukiolaisten matematiikkakilpailu 25.1.2018

LASKINTA SAA KÄYTTÄÄ.

KIRJOITA JOKAISEN TEHTÄVÄN RATKAISU OMALLE VASTAUSPAPERILLEEN.

PALAUTA VASTAUSPAPERI NIISTÄKIN TEHTÄVISTÄ JOIHIN ET VASTAA.

KIRJOITA NIMESI SELVÄSTI JOKAISEEN VASTAUSPAPERIIN.

LUE ENSIN KAIKKI TEHTÄVÄT LÄPI JA KYSY JOS ON EPÄSELVYYKSIÄ.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin perustelematta.

(a) Olkoon $f(x) = 1 + x^2$. Laske $f(f(f(f(0))))$. [1p]

(b) Oletetaan, että tänä vuonna kaikki Itämeren ympärysvaltiot vähentäisivät Itämeripäästöjään viidellä prosentilla. Kuinka monta prosenttia Itämereen kohdistuvat kokonaispäästöt tällöin vähenisivät? [1p]

(c) Montako sellaista nelinumerosta lukua on olemassa, jotka ovat muotoa $xyzw$ ja kukin numeroista x , y , z ja w on joko 0, 1 tai 2? Esimerkiksi 1201 on tällainen luku, mutta 0121 ei kelpaa. [1p]

(d) Ympyrän kehällä on 12 pistettä. Jokainen pistepari yhdistetään janalla. Montako janaa tähän tarvitaan? [1p]

(e) Laske $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 999 - 1000$. [1p]

(f) Kaupassa myydään omenoita, päärynöitä ja mandariineja kappalehintaan. Hedelmien hinnoista tiedetään seuraavaa:

- Päärynän hinta on yhden euron suurempi kuin kolmasosa omenan hinnasta.
- Omenan ja päärynän hintojen erotus on puolet mandariinin hinnasta.
- Yksi päärynä maksaa enemmän kuin yksi omena.

Kuinka paljon maksaa ostaa yksi jokaista hedelmää? [1p]

2. Eräällä satusaarella elää kaksi lintua, Leila Lokki ja Heikki Harakka. Leila Lokki valehtelee aina maanantaina, tiistaina ja keskiviikkona, mutta puhuu muina päivinä totta. Heikki Harakka puolestaan valehtelee aina torstaina, perjantaina ja lauantaina, mutta puhuu muina päivinä totta. Eräänä päivänä sekä Leila että Heikki sanovat: "Eilen oli minun valehtelupäiväni."

Mitkä ovat ne mahdolliset viikonpäivät, jolloin linnut saattavat sanoa näin? [6p]

3. Maija alkaa luettelemaan positiivisia kokonaislukuja järjestyksessä luvusta 1 alkaen lukuun 1000 saakka. Aina kun Maija sanoo jonkin luvulla 4 jaollisen luvun, niin Nuutti huutaa "hep!". Aina, kun Maija sanoo jonkin luvulla 5 jaollisen luvun, niin Viivi huutaa "hep!". Aina, kun Maija sanoo jonkin luvulla 17 jaollisen luvun, niin Severi huutaa "hep!". Kuinka monta kertaa vähintään kaksi henkilöä huutaa samanaikaisesti "hep!" sinä aikana, kun Maija luettelee luvut yhdestä tuhanteen? [6p]

4. Vastaa seuraaviin kysymyksiin. Muista perustella vastauksesi.

(a) *Karkausvuosi* on 366-päiväinen vuosi, jonka helmikuuhun on lisätty 29. päivä, eli niin kutsuttu *karkauspäivä*. Muina kuin karkausvuosina helmikuussa on 28 päivää ja näin ollen tällaisessa vuodessa on ainoastaan 365 päivää. Annettu vuosi on karkausvuosi täsmälleen silloin, kun joko (i) tai (ii) seuraavista kahdesta ehdosta toteutuu:

(i) Kyseistä vuotta vastaava vuosiluku on jaollinen luvulla 4, mutta ei luvulla 100.

(ii) Kyseistä vuotta vastaava vuosiluku on jaollinen luvulla 400.

Vastaa näiden esitietojen pohjalta seuraavaan kysymykseen:

Vuonna 2016 karkauspäivä oli maanantai. Minä vuonna maanantai on seuraavan kerran karkauspäivä? [3p]

(b) Montako nollaa on luvun $75^{26^4} \cdot 28^{25^3}$ lopussa? [3p]

5. Kolmiossa $\triangle ABC$ merkitään sivun BC keskipistettä kirjaimella D ja sivun AC keskipistettä kirjaimella E . Olkoon F janojen AD ja BE leikkauspiste. Osoita, että kolmioilla $\triangle AFE$ ja $\triangle BFD$ on sama pinta-ala. [6p]

Huom. Tässä tehtävässä väite tulee osoittaa mielivaltaiselle kolmiolle $\triangle ABC$, joka ei ole välttämättä tasasivuinen tai -kylkinen.

6. Rivissä on sata tavallista kuusitahoista noppaa, ja niiden silmälukujen summa on pariton. Kaksi pelaajaa vuorottelee ottamalla jomman kumman rivin päässä olevista kahdesta nopasta itselleen. Peli päättyy kun kaikki nopat on valittu. Voittaja on se pelaaja, jonka valitsemien noppien silmälukujen summa on suurempi. *Keksi voittostrategia ensimmäisen nopan valitsevalle pelaajalle.* (Eli keksi jokin systemaattinen tapa pelata, jota noudattamalla hän voittaa aina vastapelaajan). [6p]