

Dieses Dokument wurde im Rahmen des Erasmus+ Projekts
"Developing Digital Physics Laboratory Work for Distance Learning"
(DigiPhysLab) erstellt. Weitere Informationen:

www.jyu.fi/digiphyslab

Gekoppelte Kompasschwingungen

Studierendenversion

14.2.2023



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung-
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

Gekoppelte Kompassschwingungen

Motivation

Oszillationen sind eine der häufigsten Bewegungen, die in der Natur zu finden sind. Man stößt auf viele Beispiele, bei denen zwei oder mehr oszillierende Systeme miteinander gekoppelt sind, wie z.B. Schwingungen von gebundenen Atomen innerhalb eines Moleküls. Im Physikunterricht wird in der Regel das Beispiel zweier Pendel untersucht, die mit einer elastischen Feder verbunden sind. Obwohl wir in der Natur nicht auf Objekte stoßen werden, die mit einer elastischen Feder verbunden sind, ist die Untersuchung dieses Beispiels dennoch nützlich, da eine große Anzahl gekoppelter Schwingungen als Schwingungen von Objekten modelliert werden kann, die mit einer elastischen Feder verbunden sind. Ein Beispiel dafür ist die gekoppelte Oszillation magnetischer Dipole. Hier übernimmt die Magnetkraft die Rolle der elastischen Feder als Wechselwirkung zwischen den beiden Dipolen. Dipol-Dipol-Wechselwirkungen sind ein häufiges Phänomen auf mikroskopischer Ebene. Ein Beispiel aus dem Magnetismus ist die Wechselwirkung zwischen Kernen und Elektronen in Atomen und Molekülen, deren Dipolmomente aus ihren intrinsischen Spins entstehen. Ziel dieser Aufgabe ist es, die gekoppelten Schwingungen zweier magnetischer Dipole zu untersuchen.

Eine Magnetnadel ist ein Beispiel für einen magnetischen Dipol auf makroskopischer Ebene. Jeder Dipol in der Nähe der Erde spürt das Magnetfeld der Erde, das auf der Oberfläche des Planeten annähernd homogen ist. Wenn wir zwei Nadeln in einem ausreichend kleinen Abstand platzieren, wird jede von ihnen vom Feld der anderen Nadel zusammen mit dem Erdmagnetfeld beeinflusst. Es wird eine Dipol-Dipol-Wechselwirkung hergestellt, und wenn wir die Nadeln zum Schwingen bringen, werden ihre Schwingungen gekoppelt.

Der Formalismus ist analog zu dem für federverbundene Pendel. **Wir gehen davon aus, dass die Nadelachsen in der Gleichgewichtslage zusammenfallen und dass ihre Verschiebungswinkel klein sind.** Wir analysieren drei Fälle für drei verschiedene Ausgangsbedingungen:

1) Gleichphasige Schwingungen:

Bei $t = 0$ werden die Nadeln um den gleichen Winkel $\theta_1 = \theta_2 = \theta_A$ aus der Gleichgewichtsposition verschoben. Dann wird der zeitabhängige Auslenkwinkel beschrieben durch:

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} \cdot t\right) \quad (1)$$

2) Gegenphasige Schwingungen:

Bei $t = 0$ wird eine Nadel aus der Gleichgewichtsposition um den Winkel $\theta_1 = -\theta_A$ und die andere um den Winkel $\theta_2 = \theta_A$ verschoben. Dann werden die zeitabhängigen Auslenkwinkel beschrieben durch:

$$\theta_1(t) = \theta_A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 3\Omega^2} \cdot t\right) \quad (2)$$

$$\theta_2(t) = -\theta_A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 3\Omega^2} \cdot t\right) \quad (3)$$

3) Schwebung (engl. beat)

Bei $t = 0$ befindet sich eine Nadel in der Gleichgewichtsposition $\theta_1 = 0$ und die andere wird durch den Winkel $\theta_2 = \theta_A$ ausgelenkt. Dann werden die zeitabhängigen Auslenkwinkel beschrieben durch:

$$\theta_1(t) = \theta_A \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 3\Omega^2} - \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 3\Omega^2} + \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}{2} \cdot t\right) \quad (4)$$

$$\theta_2(t) = -\theta_A \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 3\Omega^2} - \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 3\Omega^2} + \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}{2} \cdot t\right) \quad (5)$$

In allen drei Fällen gehen wir davon aus, dass die Reibung zwischen den Nadeln und der Oberfläche vernachlässigbar ist. ω_0 ist in diesen Gleichungen die Grundfrequenz der magnetischen Nadel, die im Erdmagnetfeld schwingt und ausgedrückt wird durch:

$$\omega_0^2 = \frac{\mu B}{I}$$

wobei das μ magnetische Moment der Nadel, B die horizontale Komponente des Erdmagnetfeldes und I das Trägheitsmoment der Nadel ist. Ω^2 ist eine Abkürzung für

$$\Omega^2 = \frac{\Gamma}{I}$$

wobei Γ der effektive Kopplungsfaktor der Nadeln analog zur elastischen Kraft $F_{el} = -kx$ für federgesetzte Objekte ist.

Der effektive Kopplungsfaktor kann aus Frequenzen von gleichphasigen Schwingungen und gegenphasigen Schwingungen berechnet werden. Aus Ausdruck (1) folgt, dass $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \Omega^2$ die Frequenz einer gleichphasigen Schwingung ist, aus Ausdruck (2), dass $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 3\Omega^2$ die Frequenz einer gegenphasigen Schwingung ist. Die Kombination dieser Ausdrücke führt zu

$$\Gamma = \frac{I(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{2}$$

Übungen vor dem Laborpraktikum

Lesen Sie die Anweisungen zur Verwendung von *Tracker* und lösen Sie dort die Aufgaben.

Benötigtes Equipment

Smartphone, Computer mit *Tracker* und Datenanalysesoftware, 2 gleiche Magnetnadeln auf Ständern, Papierwinkelmesser 360°

Experimentelle Fähigkeiten im Fokus

Planen eines Experiments, Datenerhebung und -analyse

Aufgabenbeschreibung

1. Platzieren Sie eine Magnetnadel an einem Ort, an dem das Magnetfeld der Erde das einzige Magnetfeld ist, das die Nadel signifikant beeinflusst. Lenken Sie die Nadel aus der

Gleichgewichtsposition ab und zeichnen Sie ihre Schwingung mit der Kamera Ihres Telefons auf.

- a. Bestimmen Sie die Periode der Schwingung mittels Videoanalyse in *Tracker*. Berechnen Sie die Grundfrequenz ω_0 der Magnetnadel.
 - b. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Magnetnadel. Modellieren Sie die Nadel als dünne rechteckige Platte. Sie können die Plattenabmessungen in *Tracker* messen. *Hinweis:* Schätzen Sie, welche Breite der Nadel am besten für die Berechnung verwendet werden kann, damit Ihr Modell so nah wie möglich am tatsächlichen Objekt liegt.
 - c. Auf <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/magfield.shtml> der offiziellen NOAA-Website finden Sie den Wert der horizontalen Komponente des Erdmagnetfeldes für den Ort/die Stadt, an dem/an der Sie das Experiment durchführen.
 - d. Berechnen Sie das magnetische Moment der Nadel.
2. In dieser Aufgabe untersuchen Sie, wie der effektive Kopplungsfaktor vom Abstand zwischen den Magnetnadeln abhängt.
- a. Platzieren Sie die zweite Nadel in der Nähe der ersten und lassen Sie sie in Phase schwingen. Zeichnen Sie die Schwingungen erneut mit Ihrem Smartphone auf und bestimmen Sie die Frequenz in *Tracker*. Halten Sie die Nadeln im gleichen Abstand und messen Sie mit *Tracker*, wie weit die Nadeln voneinander entfernt sind, wenn sie sich in der Gleichgewichtsposition befinden.
 - b. Lassen Sie die Nadeln im gleichen Abstand wie zuvor im Phasengegensatz schwingen. Zeichnen Sie die Schwingungen auf und bestimmen Sie die Frequenz im *Tracker*.
 - c. Berechnen Sie den effektiven Kopplungsfaktor.
 - d. Wiederholen Sie die Messungen für mindestens 5 weitere Abstände zwischen den Nadeln und bestimmen Sie den effektiven Kopplungsfaktor für jede Entfernung. Lassen Sie für eine dieser Entfernungen die Nadeln so schwingen, dass Schwebung auftritt. Nehmen Sie diese Schwingung auf und speichern Sie das Video zur späteren Analyse.
 - e. Bestimmen Sie, wie der effektive Kopplungsfaktor vom Abstand zwischen den magnetischen Dipolen abhängt.
3. Verwenden Sie das Video zur Schwebung, das Sie bereits zuvor aufgenommen haben, um die Frequenz der Schwebung zu bestimmen (abzuschätzen). Bestimmen Sie mit Gleichung

(4) den theoretischen Wert der Frequenz der Schwebung für die Entfernung, in der Sie die Schwebung aufgezeichnet haben. Vergleichen Sie den gemessenen und theoretischen Wert der Frequenz der Schwebung.

Bewertung

Schreiben Sie einen Bericht gemäß den Aufgabenanweisungen. Beschreiben Sie für jeden Teil der Aufgabe kurz, wie Sie das Experiment durchgeführt und die Daten analysiert haben. Besprechen Sie die Einschränkungen der Experimente. Ziehen Sie aus den Ergebnissen der Experimente Schlussfolgerungen und diskutieren Sie diese. Kommentieren Sie, was in den Grenzen der schwachen und starken Kopplung passiert. Stützen Sie Ihre Argumente auf Ihre Daten und deren grafische Darstellungen.