

Dieses Dokument wurde im Rahmen des Erasmus+ -Projekts
"Developing Digital Physics Laboratory Work for Distance Learning"
(DigiPhysLab) erstellt. Mehr Infos: www.jyu.fi/digiphyslab

Digitale Signalverarbeitung

Studierendenversion

21.2.2023



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung-
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

Digitale Signalverarbeitung

Motivation

Stellen Sie sich vor, Sie hätten gerade das leckerste Essen der Welt probiert. Sie möchten das Rezept dafür wissen, aber niemand kann Ihnen die Zutaten sagen. Sie können vielleicht ein paar mit dem Auge und einige mehr durch Probieren bestimmen, aber Sie können kaum alles mit Sicherheit herausfinden. Stellen Sie sich nun vor, dass Sie selbst bei der am glattesten pürierten Sauce nur einen Löffel probieren müssten und nach einigen Millisekunden nicht nur feststellen könnten, welche Zutaten enthalten sind, sondern auch die jeweilige Menge. Für ein digitales Signal können wir bis zu einem gewissen Grad genau das mit der sogenannten diskreten Fourier-Transformation (DFT) machen.

Entschuldigung, falls der Vergleich mit Essen Sie hungrig werden lassen hat, aber so bekommt man eine gute Vorstellung davon, wie mächtig Joseph Fouriers Arbeit für die digitale Signalverarbeitung war. Die Idee hinter der Fourier-Transformation ist, dass fast jede Funktion als Summe von Sinusoiden dargestellt werden kann, und zwar so genau, dass nur Mathematiker sich um die Differenz kümmern müssen.

Definieren wir ein Signal $\{x_n\} = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, das aus N Signalpunkten besteht, die in konstanten Zeitintervallen von jeweils T_s Sekunden aufgenommen werden. Die DFT des Signals wird berechnet als

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}, \quad (1)$$

wobei jedes X_k eine komplexe Zahl ist und die Menge von $\{X_k\} = \{X_0, X_1, \dots, X_{N-1}\}$ das Signal im Frequenzbereich darstellt. Für eine stetige Funktion würde dies einer Transformation einer Funktion der Zeit in eine Funktion der Frequenz entsprechen. Die Interpretation der Fourier-Transformationskoeffizienten X_k wird deutlicher, wenn wir die inverse DFT betrachten:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{\frac{i2\pi}{N}kn}, \quad (2)$$

wobei wir sehen können, dass das ursprüngliche Signal als Summe komplexer sinusförmiger Komponenten dargestellt werden kann, und X_k die Amplitude und Phase jeder Komponente beschreibt. In dieser Experimentieraufgabe verwenden wir das Amplitudenspektrum der Fourier-Transformation, das für ein realwertiges Signal definiert ist als

$$A_j = \frac{2}{N} |X_j|, \quad j = 0, 1, \dots, N/2. \quad (3)$$

Es gibt uns Auskunft darüber, wie stark die Frequenz f_j im Signal mit $\{f\}_j = \{f_0, f_1, \dots, f_{N/2}\}$ vorhanden ist, wobei die Frequenz über

$$f_j = \frac{j}{NT_s}, \quad (3)$$

von dem Zeitintervall T_s zwischen den Datenpunkten abhängt, so dass die in der Fouriertransformation sichtbaren Frequenzen niemals größer werden als $\frac{1}{2T_s}$. Beachten Sie, dass ein

realwertiges Signal von N Signalpunkten im Zeitbereich somit $N/2 + 1$ physikalisch sinnvollen Frequenzen im Frequenzbereich entspricht.

In dieser Experimentieraufgabe werden wir uns nicht auf die mathematischen Feinheiten der diskreten Fouriertransformation konzentrieren. Machen Sie sich also keine Sorgen, wenn Ihnen die obigen Definitionen nicht sofort klar sind. Die interaktiven Anweisungen im zur Verfügung gestellten Python-Notebook führen Sie durch mehrere Beispiele. Ziel ist es, zu verstehen, was uns die Transformation sagen kann und wie die Transformation auf Daten angewendet werden kann, die mit einem Smartphone gesammelt wurden (oder auf einem anderen diskreten Signal). Weitere Einzelheiten finden Sie im ergänzenden Material am Ende dieses Dokuments.

Benötigtes Equipment

Smartphone mit der App *Phyphox* (RWTH Aachen) oder einer anderen App, die Zugriff auf Beschleunigungssensordaten ermöglicht, Computer zum Ausführen und Bearbeiten des Online-Python-Notebooks/Skripts, das zusammen mit den Anweisungen zur Verfügung gestellt wird.

Experimentelle Fähigkeiten im Fokus

Digitale Signalverarbeitung, Datenanalyse, Datenerfassung

Aufgabenbeschreibung

In dieser Aufgabe lernen wir die Grundlagen dessen kennen, was die diskrete Fouriertransformation kann und wie sie auf ein Signal angewendet wird. Wir werden die DFT auf unsere gesammelten Daten anwenden, um eine Frage zu beantworten, die wir experimentell untersuchen wollten.

Befolgen Sie die Anweisungen im [verknüpften Python-Notebook](#)

(<https://colab.research.google.com/drive/1tISXg9CZP0M5bErMyQVKH9uqLsDRY8sP?usp=sharing>)

und führen Sie schließlich ein Experiment durch, um eines der folgenden Elemente zu messen:

1. Die Vibrationsfrequenz Ihres Telefons
2. Die Rotationsfrequenz des Trockenschleudergangs Ihrer Waschmaschine (Legen Sie Ihr Telefon jedoch nicht in die Maschine!)
3. Die Schwingungsfrequenz eines Computers (wenn sie stark genug ist, um gemessen zu werden).
4. Die Frequenz der Vibrationen in einem Auto aufgrund des laufenden Motors
5. Ihre Herzfrequenz
6. Die Frequenz eines anderen periodischen Signals, das Sie sich selbst überlegen

Bewertung

Schreiben Sie einen kurzen *computational essay* bestehend aus Text, Zahlenwerten sowie Ausschnitten aus Code und Codeausgaben, in welchem Sie

- a) die **fett gedruckten** Fragen im Python-Notebook beantworten und die gewünschten Zahlenwerte angeben
- b) beschreiben, was Sie untersuchen möchten und den verwendeten Versuchsaufbau erklären
- c) den Code darlegen, den Sie für die Datenanalyse des Experiments verwendet haben
- d) die erzielten Ergebnisse und die Unsicherheiten diskutieren, die zu den Messungen gehören
- e) das Experiment reflektieren und jene Ideen aufschreiben, die für Sie während dieser Experimentieraufgabe am sinnvollsten waren. Denken Sie auch an mögliche Ideen, wie Sie Ihr Experiment überarbeiten können.

Der *computational essay* sollte eine zusammenhängende Übersicht Ihrer Ausarbeitungen darstellen. Das Notebook mit den Anweisungen ist ein Beispiel dafür, wie ein solcher *essay* aussieht. Sie können eine Kopie des Notebooks erstellen und Ihren *computational essay* so im gleichen Format erstellen.

Ergänzendes Material

- Steven W. Smith, "The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing", Second Edition, California Technical Publishing, 1999. Kostenlos online verfügbar: <https://www.dspguide.com/>
- D. Donnelle und B. Rust, "Die schnelle Fouriertransformation für Experimentatoren. Teil I. Konzepte" in Computing in Science & Engineering, Band 7, Nr. 2, S. 80-88, 2005. Kostenlos online verfügbar: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1401806>