

Tämä tiedosto on luotu osana Erasmus+ -projektia ”Developing Digital Physics Laboratory Work for Distance Learning” (DigiPhysLab).

Lisää tietoa: www.jyu.fi/digiphyslab

Pullon mallinnus

Opiskelijan versio

12.1.2023



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Tämä työ on julkaistu lisenssillä [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

Pullon mallinnus

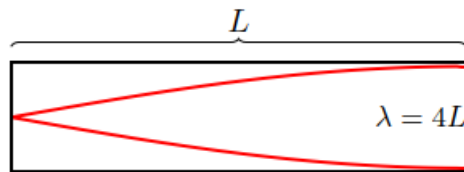
Johdanto

Monet soittimet, kuten huilut, klarinetti tai trumpetti, tarvitsevat soittimen sisällä värähtelevän ilmapatsaan tuottaakseen ääntä. Tällaisen soittimen äänen korkeutta (dominoivaa taajuutta) voidaan muuttaa lyhentämällä tai pidentämällä värähtelevän ilmapatsaan pituutta. Tässä kokeessa tutkimme yksinkertaista soitinta: pulloa, jossa on vaihteleva määrä vettä. Puhaltamalla sopivasti pullon suun yli saadaan aikaan tasainen ääni, jonka korkeutta voidaan muuttaa lisäämällä pulloon vettä. Esimerkiksi monien huilujen ääni tuotetaan täsmälleen samalla tekniikalla, mutta äänen korkeuden säätö tapahtuu niissä hienostuneemmin menetelmin.

Pulloa mallinnetaan usein toisesta päästä avoimena putkena (Kuva 1). Tällaiseen puoliavoimeen putkeen muodostuvan seisovan aallon matalin taajuus on tuttua muotoa

$$f = \frac{c_{\text{ilma}}}{4L}, \quad (1)$$

missä c_{ilma} on äänen nopeus ilmassa ja L on putkessa olevan ilmapatsaan pituus.

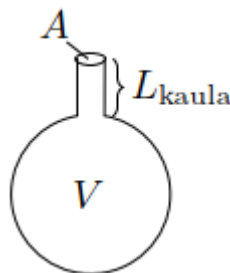


Kuva 1: Matalin seisovan aaltoliikkeen taajuus, joka puoliavoimeen putkeen voi muodostua. Muodostuva aallonpituus on neljä kertaa putken pituus.

Helmholtzin resonaattori on pullomainen kappale, jossa pallomainen vatsa (tilavuus V) on yhdistetty ulkopuoliseen ilmaan sylinterimäisen kaulan (pituus L_{kaula}) kautta (Kuva 2). Helmholtzin resonaattorimallin ideana on, että resonaattorin kaulassa oleva "ilmakorkki" värähtelee resonaattorin vatsassa olevan ilman joustavuutta vasten. Tämän värähtelyn taajuuden voidaan osoittaa olevan (idea esitetty ohjeen lopussa)

$$f_H = \frac{c_{\text{ilma}}}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{VL_{\text{kaula}}}}, \quad (2)$$

missä A on resonaattorin kaulan poikkipinta-ala. Vertaa yhtälöitä (1) ja (2) toisiinsa. Mitä yhteistä ja mitä eroja niillä on?



Kuva 2: Helmholtzin resonaattori.

Tavoitteena on suunnitella ja toteuttaa tutkimus näiden kahden mallin testaamiseksi. **Työn tärkein oppimistavoite on mallin antaman ennusteen vertaaminen mitattuun aineistoon.**

Välinelista

Älypuhelin (taajuusanalysointilaite), ainakin yksi pullo (miehellään pitkäkaulainen), vettä, desilitramitta tai vastaava, viivoitin tai mittanauha, ohjelma kuvaajien piirtämistä ja data-analyysia varten (esim. Origin, SciDAVis, GeoGebra, python). Myös taulukkolaskentaohjelma on hyödyksi. Pääset käsiksi puhelimen mittaamaan taajuusdataan käyttämällä ilmaista sovellusta phyphox (RWTH Aachen University) tai Physics Toolbox Sensor Suite (Vieyra Software / Chrystian Vieyra).

Harjoitettavat kokeellisen työskentelyn taidot

Tutkimuksen suunnittelu, aineiston kerääminen, aineiston vertaaminen malliin, aineiston esittäminen.

Turvallisuus

Tasaisen äänen saaminen pullosta voi vaatia muutaman yrityksen. Pidä välillä taukoja puhumisesta ylihengittämisen välttämiseksi.

Työn kuvaus

Testaa kokeellisesti puoliavoimen putken ja Helmholtzin resonaattorin malleja pullosta puhaltamalla saadun äänen taajuudelle (yhtälöt (1) ja (2)). Kiinnitä huomiota mallien määrittelyalueisiin ja pyri tutkimaan myös mallien rajoja. Suunnittele ja toteuta tarvittavat mittaukset. Valitse keräämällesi aineistolle jokin mielekäs esitystapa ja vertaa aineistoasi mallien ennustamiin taajuuksiin. Muista antaa arvio tulostesi kokeelliselle epävarmuudelle.

Lisätutkimus:

Yhtälöiden (1) ja (2) takana olevia malleja voidaan kehittää määrittelemällä niin kutsuttu efektiivinen pituus. Koska putken tai pullon kaulan säde on äärellinen, värähtelevä ilmapatsas ulottuu todellisuudessa myös hieman pullon ulkopuolelle. Näin ollen yhtälöissä esiintyvät pituudet voidaan korvata efektiivisellä pituudella seuraavasti:

$$L_{\text{(kaula)}}^{\text{eff}} = L_{\text{(kaula)}} + ar, \quad (3)$$

missä a on dimensioton parametri ja r on putken säde (tässä pullon kaulan säde). Huomaa, että a voi saada eri arvon kullekin mallille. Voit myös etsiä sopivia arvoja kirjallisuudesta.

Mikäli aikaa on, tarkastele mahdollisuuksia parantaa malleja efektiivisen pituuden avulla. Voit myös pohtia, millä muilla tavoin voisit testata annettuja malleja.

Arviointi

Luokaa työstänne tiivis diaesitys (esim. Powerpoint, noin viisi diaa), jossa esittelette tutkimuksenne ja havaintonne. Antakaa sopivalla tavalla esitettyyn aineistoonne nojaten perusteltu johtopäätös siitä, kuinka hyvin mallit kuvasivat pullosta lähtevää ääntä.

Helmholtzin resonaattorin taajuuden johtamisen idea (vapaaehtoinen tehtävä):

Olkoon pullon kaulassa ilmamassa m . Jos tätä ilmamassaa poikkeutetaan pienen δy :n verran, tilavuus pullon vatsassa muuttuu muotoon $V + \delta V$ ja paine muotoon $p + \delta p$. Oletetaan, että prosessi on adiabaattinen, jolloin voidaan osoittaa, että

$$\frac{\delta p}{p} = -\gamma \frac{\delta V}{V},$$

missä γ on adiabaattinen indeksi. Kirjoitetaan seuraavaksi auki Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö pullon kaulassa olevalle ilmamassalle. Havaitaan, että kyseessä on differentiaaliyhtälö, joka on tuttua harmonisen värähtelijän muotoa. Käyttämällä yllä olevaa tulosta, saadaan liikeyhtälöstä johdettua yhtälön (2) mukainen Helmholtzin resonaattorin resonanssitaajuus.

Huom: Tässä tarvitaan myös yhtälöä $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ äänen nopeudelle väliaineessa, jonka tiheys on ρ .