Dieses Dokument wurde im Rahmen des Erasmus+ -Projekts "Developing Digital Physics Laboratory Work for Distance Learning" (DigiPhysLab) erstellt. Mehr Infos: [www.jyu.fi/digiphyslab](http://www.jyu.fi/digiphyslab)

Wie modelliert man eine Flasche?

Studierendenversion

1.2.2023




Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

# Wie modelliert man eine Flasche?

## Motivation

Viele Musikinstrumente wie Flöte, Klarinette oder Trompete nutzen eine vibrierende Luftsäule im Inneren des Instruments, um Klang zu erzeugen. Die Tonhöhe (dominierende Schallfrequenz) des Instruments wird dann durch Veränderung der Länge der vibrierenden Luftsäule geändert. In diesem Experiment werden wir ein einfaches Instrument untersuchen: eine Flasche mit verschiedenen Mengen Wasser darin. Durch das Blasen über die Oberseite der Flasche kann man eine gleichmäßige Tonhöhe aus der Flasche erzeugen, und durch Hinzufügen von Wasser kann man die Tonhöhe verändern. Viele Flöten zum Beispiel erzeugen ihren Klang durch eine ähnliche Blastechnik, obwohl ihre Art, die Tonhöhe zu verändern, etwas subtiler ist.

Die Flasche wird oft als Röhrchen modelliert, die an einem Ende (unten) geschlossen und am anderen (oben) offen ist, siehe Abbildung 1. Die niedrigste Frequenz stehender Wellen, die eine solche offen-geschlossene Röhre zulässt, ist von der bekannten Form

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   | $$f = \frac{c\_{Luft}}{4L} ,$$ | (1) |

wobei der $c\_{Luft}$ Schall in der Luft und $L$ die Länge der Luftsäule in der Röhre ist.



Abbildung 1: Die niedrigste Frequenz, die von einem offen-geschlossenen Rohr zugelassen wird. Die Wellenlänge der entstehenden stehenden Welle beträgt das Vierfache der Länge der Röhre.

Ein Helmholtz-Resonator ist ein flaschenartiges Objekt, bei dem ein geschlossener kugelförmiger Volumenhohlraum $V$ über einen zylindrischen Hals der Länge $L\_{Hals}$ mit offener Luft verbunden ist (siehe Abbildung 2). Das Prinzip eines Helmholtz-Resonators ist, dass die Luft im Hals gegen die Elastizität der Luft im Hohlraum schwingen kann, wodurch eine Schwingung mit einer Resonanzfrequenz erzeugt wird (siehe unten im Dokument für die Idee der Ableitung).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   | $$f\_{H}=\frac{c\_{Luft}}{2π}\sqrt{\frac{A}{VL\_{Hals}}} ,$$ | (2) |

wobei die $A$ Querschnittsfläche der Öffnung des Halses ist. Vergleichen Sie die Gleichungen (1) und (2). Was haben sie gemeinsam und worin unterscheiden sie sich?



Abbildung 2: Ein Helmholtz-Resonator.

In dieser Aufgabe werden wir ein Experiment entwerfen, mit dem wir die Modellierungen der Gleichungen (1) und (2) überprüfen können.

**Das Hauptlernziel dieses Experiments besteht darin, den Vergleich von Modellvorhersagen mit Daten zu üben.**

## Benötigtes Equipment

Smartphone (Frequenzanalysator), mindestens eine Flasche (langer Hals bevorzugt), Wasser, Messbecher, Lineal- oder Maßband, Grafik- und Analysesoftware. Außerdem wird ggf. ein Tabellenkalkulationsprogramm benötigt. Auf die Frequenzdaten können Sie mit der kostenlosen Smartphone-App phyphox (RWTH Aachen) oder der Physics Toolbox Sensor Suite (Vieyra Software / Chystian Vieyra) zugreifen.

## Experimentelle Fähigkeiten im Fokus

Planung eines Experiments, Datenerfassung, Vergleich von Modellvorhersagen mit Daten, Darstellung von Daten.

## Sicherheitshinweis

Man benötigt ggf. mehrere Versuche, bis ein solider Klang aus der Flasche kommt. Legen Sie ab und zu Pausen ein, um Überatmung zu vermeiden.

## Aufgabenbeschreibung

Testen Sie die Modellierungen einer offen-geschlossenen Röhre und eines Helmholtz-Resonators in den Gleichungen (1) bzw. (2) hinsichtlich der Frequenz des Tons, der beim Pusten über einen Flaschenhals entsteht. Achten Sie auf den Bereich, in dem jedes Modell anwendbar ist, und versuchen Sie auch, die Grenzen der Modelle auszuloten. Planen und führen Sie die erforderlichen Messungen durch. Wählen Sie eine geeignete Methode zur Darstellung Ihrer gesammelten Daten und vergleichen Sie Ihre Daten mit den vorhergesagten Frequenzen der beiden Modelle. Denken Sie daran, die experimentelle Unsicherheit Ihrer Ergebnisse abzuschätzen.

**Zusatzaufgabe:**

Man kann die Modelle hinter den Gleichungen (1) und (2) verfeinern, indem man die sogenannte effektive Länge einführt. Aufgrund des endlichen Radius des Rohres oder Flaschenhalses erstreckt sich die vibrierende Länge der Luft über die Länge des zylindrischen Rohres hinaus. Dies kann erklärt werden, indem den Längen in den Gleichungen (1) und (2) eine Korrektur proportional zum Radius des Flaschenhalses hinzugefügt wird:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | $$L\_{(Hals)}^{eff}=L\_{(Hals)}+ ar ,$$ | (3) |

wobei $ a$ ein dimensionsloser Parameter ist und $r$ der Radius des Rohres (hier Flaschenhals) ist. Beachten Sie, dass für jedes Modell unterschiedliche Werte für $a$ vorliegen können. Sie können auch nach geeigneten Werten aus der Literatur suchen.

Falls genug Zeit vorhanden ist, untersuchen Sie die Möglichkeit, die Modelle zu verfeinern, indem Sie eine effektive Länge wie in Gleichung (3) verwenden. Wie könnten Sie, vorausgesetzt Sie verfügten über noch mehr Zeit und Equipment, die beiden Modelle noch weiter testen?

## Bewertung

Erstellen Sie eine kurze Präsentation (z. B. ca. 5 PowerPoint-Folien), in der Ihre Arbeit und Ergebnisse beschrieben werden. Konzentrieren Sie sich darauf, eine Schlussfolgerung über die Gültigkeit jedes Modells zu liefern, die durch Ihre Daten in einer geeigneten Darstellung unterstützt wird.

**Herleitung der Helmholtz-Resonanzfrequenz (optionale Aufgabe):**

Es befinde sich eine Masse *m* an Luft im Hals der Flasche. Wenn diese Luft im Hals um eine kleine Länge $y$verschoben wird, wird das Volumen im Hohlraum zu $V+δV$ mit einem Druck $p+δp$. Gehen Sie davon aus, dass hier ein adiabatischer Prozess stattfindet, und zeigen Sie, dass

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   | $$\frac{δp}{p}=-γ\frac{δV}{V}$$ |  |

Gilt, wobei *γ* der adiabatische Index ist. Als nächstes schreiben Sie das zweite Newtonsche Gesetz für die Luftmasse im Flaschenhals auf. Sie sollten eine Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators finden. Aus dem obigen Ergebnis leitet man Gleichung (2) für die Resonanzfrequenz eines Helmholtz-Resonators ab.

Hinweise: Denken Sie daran, dass $c=\sqrt{γ\frac{p}{ρ}}$ für die Schallgeschwindigkeit in einem Medium mit Dichte $ρ$ gilt.