Ovaj dokument nastao je u sklopu Erasmus+ projekta “Developing Digital Physics Laboratory Work for Distance Learning” (DigiPhysLab). Više informacija: [www.jyu.fi/digiphyslab](http://www.jyu.fi/digiphyslab)

Kako modelirati bocu?

Verzija za studente

10.1.2023




Ovo djelo licencirano je pod [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

# Kako modelirati bocu?

## Motivacija

Mnogi glazbeni instrumenti, poput flaute, klarineta ili trube, oslanjaju se na titranje stupca zraka unutar instrumenta kako bi proizveli zvuk. Visina (dominantna frekvencija) nastalog zvuka može se mijenjati promjenom duljine titrajućeg zračnog stupca. U ovom eksperimentu istraživat ćemo jednostavan instrument: bocu s različitim količinama vode u njoj. Puhanjem preko vrha boce možemo proizvesti stabilan zvuk iz boce, a dodavanjem vode možemo mijenjati visinu zvuka. Mnoge flaute proizvode zvuk sličnom tehnikom puhanja, iako je njihov način promjene visine zvuka nešto jednostavniji.

Boca se često modelira kao cijev s jednim zatvorenim krajem (dno) i jednim otvorenim krajem (vrh), vidi sliku 1. Najniža moguća frekvencija stojnih valova koji nastaju u zatvoreno-otvorenoj cijevi definirana je izrazom

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   | $$f = \frac{c\_{zrak}}{4L} ,$$ | (1) |

gdje je $c\_{zrak}$ brzina zvuka u zraku, a $L$ duljina zračnog stupca u cijevi.



Slika 1: Najniža moguća frekvencija za zatvoreno-otvorene cijevi. Valna duljina formiranog stojnog vala je četiri puta veća od duljine cijevi.

Helmholtzov rezonator je objekt sličan boci koji se sastoji od zatvorene sferne šupljine volumena $V$ na koju se nastavlja otvoreni cilindrični vrat duljine $L\_{vrat}$, vidi sliku 2. Princip Helmholtzovog rezonatora je da zrak u vratu može oscilirati zbog elastičnosti zraka u šupljini, stvarajući oscilacije s frekvencijom rezonancije (na dnu dokumenta možete pronaći upute za izvođenje jednadžbe)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   | $$f\_{H}=\frac{c\_{zrak}}{2π}\sqrt{\frac{A}{VL\_{vrat}}} ,$$ | (2) |

gdje je $A$ površina poprečnog presjeka otvora vrata. Usporedite jednadžbe (1) i (2). Što im je zajedničko, a što je različito?



Slika 2: Helmholtzov rezonator.

U ovoj vježbi osmislit ćete eksperiment kojim ćete testirati modele (1) i (2).

**Glavni cilj ove vježbe je vježbanje uspoređivanja podataka predviđenih teorijskim modelom i izmjerenih podataka.**

## Popis opreme

Pametni telefon (analizator frekvencija), najmanje jedna boca (ako je moguće s dužim vratom), voda, čaša za mjerenje od jednog dl (100 ml) ili slično, ravnalo ili mjerna traka, softver za analizu i crtanje grafova. Softver za proračunske tablice također će biti koristan. U besplatnim aplikacije za pametne telefone phyphox (Sveučilište RWTH Aachen) ili Physics Toolbox Sensor Suite (Vieyra Software / Chystian Vieyra) mogu se mjeriti podaci o frekvenciji.

## Eksperimentalne vještine u fokusu

Planiranje eksperimenta, prikupljanje podataka, usporedba predviđanja modela s mjerenim podacima, prikaz podataka.

## Sigurnost

Možda će trebati nekoliko pokušaja da se dobije stabilan zvuk iz boce. Uzmite pauze od puhanja s vremena na vrijeme kako biste izbjegli preopterećenje.

## Opis zadatka

Testirajte modele zatvoreno-otvorene cijevi i Helmholtzovog rezonatora pomoću frekvencije zvuka nastale puhanjem preko vrha boce, dane u jednadžbi (1) odnosno (2). Obratite pozornost na područje u kojem je svaki model primjenjiv i pokušajte ispitati granice modela. Isplanirajte i provedite potrebna mjerenja. Odaberite prikladan način na koji ćete prikazati prikupljene podatke i napravite usporedbu između svojih podataka i frekvencija koje predviđaju ova dva modela. Ne zaboravite procijeniti mjernu nepouzdanost svojih rezultata.

**Dodatno istraživanje:**

Modele opisane jednadžbama (1) i (2) možemo nadograditi uvođenjem takozvane efektivne duljine. Zbog konačnog radijusa cijevi ili vrata boce, duljina titrajućeg stupca zraka proteže se izvan duljine cilindrične cijevi. To možemo uzeti u obzir tako da duljini vrata boce u jednadžbama (1) i (2) dodamo korekciju proporcionalnu radijusu vrata boce:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   | $$L\_{(vrat)}^{ef}=L\_{(vrat)}+ ar ,$$ | (3) |

gdje je $a$ bezdimenzionalni parametar, a $r$ radijus cijevi (ovdje vrata boce). Imajte na umu da $ a$ može imati različite vrijednosti za različite model. Prikladne vrijednosti možete potražiti i u literaturi.

Ako vam ostane dovoljno vremena, istražite mogućnosti usavršavanja modela korištenjem efektivne duljine iz jednadžbe (3). Kada biste imali još više vremena i opreme, kako biste mogli dodatno testirati dva modela?

## Izvještaj

Napravite kratku prezentaciju (npr. oko 5 slajdova u PowerPoint-u) u kojoj ćete opisati vaš rad i rezultate. Usredotočite se na donošenje zaključka o valjanosti svakog modela. Vaše zaključke potkrijepite prikupljenim podacima prikazanim u odgovarajućem obliku.

**Izvođenje Helmholtzove rezonantne frekvencije (izborni zadatak):**

Neka se u vratu boce nalazi zrak mase *m*. Ako se zrak u vratu pomakne za malu duljinu δ*y*, volumen zraka u šupljini postaje $V + δV$ pri tlaku $p + δp$. Pretpostavite da je ovo adijabatski proces i pokažite da vrijedi

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|   | $$\frac{δp}{p}=-γ\frac{δV}{V},$$ |  |

gdje *je γ* adijabatski indeks. Zatim raspišite Newtonov II zakon za masu zraka u vratu boce. Trebali biste uočiti diferencijalnu jednadžbu harmonijskog oscilatora. Iskoristite rezultat iznad kako biste izveli jednadžbu (2) za rezonanciju Helmholtzovog rezonatora.

Napomena: Sjetite se da brzinu zvuka u mediju gustoće $ρ$ možemo opisati jednadžbom $c=\sqrt{γ\frac{p}{ρ}}$.